8. Übungsblatt am 11.5.2011 - Mathematik 1 für BI - WS 2010

49. Zeigen Sie, dass die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ streng monoton und daher umkehrbar ist. Fertigen Sie eine Skizze an! Erklären Sie insbesondere wie ist tanh überhaupt definiert ist, und warum das Intervall $(-1, 1)$ tatsächlich ein geeigneter Wertebereich ist!

50. Erklären Sie die Regel von der Ableitung der Umkehrfunktion und wenden Sie diese an um die Ableitung der Funktion $f(x) = \operatorname{artanh}(x)$ auf $(-1, 1)$ zu bestimmen.

51. Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ auf $(-1, 1)$ mit $f(x) = \operatorname{artanh}(x)$ übereinstimmt, indem Sie die Ableitungen der beiden Funktionen vergleichen.

52. Dividieren Sie

$$p_1(x) = x^4 - 42x^2 + 64x + 105 \quad \text{durch} \quad q_1(x) = x^2 - 8x + 15,$$

$$p_2(x) = 2x^4 + 17x^3 + 19x^2 - 62x + 24 \quad \text{durch} \quad q_2(x) = x^2 + 5x - 6,$$

$$p_3(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \quad \text{durch} \quad q_3 = x - 2$$

und bestimmen Sie gegebenenfalls den Rest.

53. Zerlegen Sie folgende rationale Funktionen in Partialbrüche:

$$\frac{3x^2 - 4x - 5}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}, \quad \frac{17x^2 - 9x - 350}{10x^3 - 20x^2 - 350x},$$

54. Was ist die Taylorreihe einer Funktion - erklären Sie ausführlich! Entwickeln Sie

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

jeweils in eine Taylorreihe um $x = 1$ und geben Sie den Konvergenzradius dieser Reihe an.

55. Gegeben sei die rationale Funktion

$$h(x) = \frac{3x^2 - 2x + 4}{(x+1)(x-2)^2}.$$

Entwickeln Sie durch Partialbruchzerlegung die Funktion h in eine Taylorreihe um $x = 0$ und lesen Sie daraus eine allgemeine Formel für $h^{(n)}(0)$, die n-te Ableitnung von h an 0, ab.