## 1. Übung

1. Für reelle Zahlen $p$ und $q$ sei die Gleichung
$$x^2 + px + q = 0$$
gegeben.
   (a) Leiten Sie die Lösungsformel für solche Gleichungen her. Ergänzen Sie hierzu die linke Seite der Gleichung auf ein vollständiges Quadrat.
   (b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen von
$$x^2 + 4x - 5 = 0, \quad x^2 + 14x + 49 = 0, \quad x^2 - 2x + 2 = 0.$$

2. (a) Wiederholen Sie den Induktionsbeweis der Formel
$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$
aus dem Skript. Machen Sie sich speziell bewusst, warum aus den dort angeführten Zeilen (ohne weitere Rechnung !) die Gültigkeit von
$$1 + 2 + \ldots + 117117 = \frac{117117 \cdot 117118}{2}$$
folgt.
   (b) Benutzen Sie die Formel (1), um mit vollständiger Induktion die Gültigkeit von
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$
nachzuweisen.

3. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n = 2, 3, \ldots$
$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

4. (a) Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$.
Der Induktionsschritt lässt sich zeigen – tun sie dies. Stimmt die Aussage? Wenn nein, begründen Sie dies!
   (b) Wo liegt der Fehler in folgendem „Beweis" der Aussage *In einer Gruppe von n Menschen haben alle die gleiche Augenfarbe.*
Beweis: $n = 1$ Nur eine Person, dessen Augen hat sicher nur eine Farbe.
$n \to n+1$: Laut Induktionsannahme gilt die Aussage für jede $n$ Personen umfassende Gruppe. Betrachtet man nun eine Gruppe von $n+1$ Personen, so wählt man zunächst $n$ von ihnen willkürlich – diese haben aufgrund der Induktionsvoraussetzung alle gleiche Augenfarbe. Anschließend ersetzt man in dieser Gruppe beliebig eine Person durch die noch nicht betrachtete $(n+1)$–te Person. Abermals ist die Induktionsvoraussetzung erfüllt, d.h. auch in dieser nun betrachteten Gruppe von $n$ Personen haben alle dieselbe Augenfarbe, d.h. auch die $(n+1)$–te Person hat dieselbe Augenfarbe. Somit haben alle $n+1$ Personen dieselbe Augenfarbe.

5. Sei $Q_0$ ein Quadrat mit Seitenlänge $s_0 = 1$. $Q_0$ wird eine um 45 Grad gedrehte und entsprechend verkleinerte Kopie von $Q_0$ eingeschrieben – dieses eingeschriebene Quadrat, $Q_1$, hat Seitenlänge $s_1$. Dem Quadrat $Q_1$ wird wieder eine um 45 Grad gedrehte und entsprechend verkleinerte Kopie von $Q_1$ eingeschrieben – dieses eingeschriebene Quadrat sei $Q_2$ und $s_2$ seine Seitenlänge (Die Seiten von $Q_2$ sind also parallel zu jenen von $Q_0$). $Q_2$ wird nach selber Prozedur ein weiteres (um 45 Grad gedrehtes, verkleinertes) Quadrat $Q_3$ mit Seitenlänge $s_3$ eingeschrieben und so weiter.
Argumentieren Sie mit dem Prinzip der vollständigen Induktion (und geometrischen Überlegungen), dass für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, \ldots$ folgende Aussage stimmt:
Das $n$–te eingeschriebene Quadrat $Q_n$ hat Seitenlänge $(1/\sqrt{2})^n$.
Hinweis: Skizze!

6. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für natürliche Zahlen $n$ groß genug (wie groß ?) gilt, dass $n^2 < 2^n$.

7. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $6^n - 5n + 4$ teilbar durch 5 ist.

8. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$$

eine natürliche Zahl ist.