

1. Übungsblatt - Mathematik 2 für MB und VT - WS 2012/13

- (a) Geben Sie eine Basis des \mathbb{R}^3 an und erläutern Sie lineare Unabhängigkeit und Dimension anhand dieses Beispiels. Kann es eine Basis geben, die nur aus zwei Vektoren besteht?
(b) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{x} = \dot{x}$$

einen Vektorraum bilden und berechnen Sie zwei Elemente des Fundamentalsystems.

- Sei \mathbf{n} ein beliebiger Vektor im \mathbb{R}^3 und a eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass die Lösungen \mathbf{z} der Gleichung $\mathbf{z} \cdot \mathbf{n} = a$ nur für $a = 0$ einen Vektorraum bilden.
- (a) Zeigen Sie, dass die Polynome vom Grad kleiner als $k \in \mathbb{N}$ einen Vektorraum bilden.
(b) Geben Sie eine lineare Differentialgleichung an, deren Lösungsraum genau aus den Polynomen vom Grad kleiner als k besteht. Bestimmen Sie zwei Fundamentalsysteme dieser Differentialgleichung.
- Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren nicht linear unabhängig sind.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ersetzen Sie \mathbf{v}_2 durch einen neuen Vektor \mathbf{u} , sodass $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{u}, \mathbf{v}_3\}$ zu einer Basis wird.

- Seien $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_3\}$ und $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_3\}$ Basen des \mathbb{R}^3 . Es gelten folgende Gleichungen:

$$\mathbf{b}_1 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{b}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Wie lauten die Komponenten der Vektoren $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_3$ bezüglich der Basis B ? Berechnen Sie außerdem die Komponenten der Vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_3$ und $\mathbf{z} = \mathbf{b}_1$ bezüglich der Basis B .

- (a) Erläutern Sie den Begriff des inneren Produktes und geben Sie zwei Beispiele euklidischer Vektorräume an. Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Norm und Skalarprodukt.
(b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen (jeweils) zwei beliebigen Vektoren aus Ihren Beispiel-Vektorräumen. Berechnen Sie außerdem den Winkel zwischen zwei Elementen der kanonischen Basis des \mathbb{R}^n .

7. (a) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt mit Gewichtsfunktion x auf $C([0, 1])$, definiert durch

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 x f(x) g(x) \, dx,$$

alle Eigenschaften eines Skalarproduktes erfüllt.

- (b) Berechnen Sie das Skalarprodukt mit Gewichtsfunktion x der Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ in $C([0, 1])$ und die Norm der Funktion $h(x) = \pi$.

8. Sei $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ eine Menge orthonormaler Vektoren.

- (a) Berechnen Sie beide Seiten der Ungleichung von Cauchy-Schwarz für zwei dieser Vektoren.

- (b) Zeigen Sie, dass die Vektoren in B bereits linear unabhängig sein müssen.

9. **Orthogonalisierungsverfahren von E. Schmidt:** Sei $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ eine Basis des \mathbb{R}^n . Rechnen Sie nach, dass die Vektoren in $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ gegeben durch $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{e}_1\|} \mathbf{e}_1$ und

$$\mathbf{b}_k = \frac{1}{\|\mathbf{e}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{b}_i) \mathbf{b}_i\|} \left(\mathbf{e}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{b}_i) \mathbf{b}_i \right), \quad 2 \leq k \leq n,$$

eine Orthonormalbasis bilden. *Hinweis:* Vollständige Induktion.

10. Führen Sie das Orthogonalisierungsverfahren von E. Schmidt für die Vektoren

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

durch und bestimmen Sie damit eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 . Gibt es noch andere Orthonormalbasen des \mathbb{R}^3 ?