11. Übungsblatt - Mathematik 2 für MB und VT - WS 2012/13

1. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen

$$y'' - y' - 2y = e^x + x, \qquad y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{3x}, \qquad y'' - y' - 2y = x\sin(x).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Methode der unbestimmten Koeffizienten zur Bestimmung einer partikulären Lösung.

2. Sei $\lambda \geq 0$. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$\ddddot{x} = \lambda x.$$

3. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen

$$y''' + y = 0, \qquad y''' - 7y'' + 15y' - 9y = 0, \qquad y'''' + 8y'' + 16y = 0.$$

4. Geben Sie eine Differentialgleichung mit dem Fundamentalsystem

$$\{1, x, \sin(x), \cos(x)\}$$

an.

5. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'''' - y = \cos(x) + 1$$

Hinweis: Verwenden Sie die Methode der unbestimmten Koeffizienten zur Bestimmung einer partikulären Lösung.

6. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungssysteme mit der Eigenwert-Eigenvektormethode.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 3y \\ \dot{y} &= 6x + 4y, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= x + y, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= 2x - y \\ \dot{y} &= 4x - 2y. \end{aligned}$$

7. Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mithilfe der Eliminationsmethode.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= x + y + 1. \end{aligned}$$

8. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem ($x(0) = y(0) = 1$) mithilfe der Eliminationsmethode.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 2y \\ \dot{y} &= -x + e^t. \end{aligned}$$

9. (a) Erläutern Sie den Satz über die Stabilität linearer Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten.

   (b) Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

   unter Verwendung der Transformationsmethode.

   (c) Sind die Lösungen dieser Differentialgleichung stabil?

10. (a) Erläutern Sie den Begriff “autonome Differentialgleichung 2. Ordnung”.

   (b) Erklären Sie das zugehörige Lösungsverfahren anhand des Beispieles

$$\ddot{x} + \sin(x) = 0, \qquad x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 1.$$