2. Übungsblatt - Mathematik 2 für MB und VT - WS 2012/13

1. Erläutern Sie die Addition und die Multiplikation von Matrizen. Geben Sie (jeweils) zwei 3×3 Matrizen A, B an, sodass (a) $AB = BA$ oder (b) $AB \neq BA$.

2. (a) Erläutern Sie die Bedeutung der Matrix ($\phi \in [0, 2\pi]$)

$$A_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie A_ϕ^n für $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion.

(b) Geben Sie eine Matrix B an, die $B^n = B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Finden Sie weiters eine Matrix C, sodass

$$C \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{aber} \quad C^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $n \geq 2$. Begründen Sie Ihre Aussage.

3. (a) Erläutern Sie die wichtigsten Eigenschaften einer Matrix, die durch Berechnung ihrer Determinante bestimmt werden können.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen und interpretieren Sie Ihr Ergebnis analog zu (a).

$$\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ b & a & b \end{pmatrix}$$

4. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

5. (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten

$$(1,1), \quad (3,5), \quad (0,-1)$$

und erläutern Sie Ihr Ergebnis.

(b) Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$ und das Volumen des von $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ aufgespannten Parallelepipeds.

6. Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Determinante der $(n+1) \times (n+1)$ Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ n & n & n & n & n \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Beispiel 4.

7. Seien A, B nichtsinguläre $n \times n$ Matrizen. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Inversen und der Transposition.

   (a) $(A^{-1})^{-1} = A$,

   (b) $(AB)^T = B^T A^T$,

   (c) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

8. Bestätigen Sie $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ und $|A^T| = |A|$ indem Sie jeweils beide Seiten der Gleichung direkt berechnen, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Invertieren Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Bestimmen Sie die Funktionaldeterminanten der folgenden Transformationen:

   (a) Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

   (b) Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\phi \\ y &= r \cos\phi \\ z &= s \end{aligned}$$