

3. Übungsblatt - Mathematik 2 für MB und VT - WS 2012/13

- (a) Erläutern Sie den Begriff der Lineartransformation.
(b) Geben Sie ein Beispiel einer Lineartransformation an und begründen Sie Ihre Aussage.
(c) Sind alle Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Lineartransformationen? Begründen Sie Ihre Aussage durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

2. Sei

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Funktionaldeterminante der Transformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

und ihrer Inversen.

3. Sei C die Matrix aus Beispiel 2.

- (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\ell : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\ell(\mathbf{x}) = C\mathbf{x}$ linear ist.
(b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Abbildung ℓ aus Beispiel 3a bezüglich der kanonischen Basis.
(c) Bilden die Bilder der kanonischen Basis unter C wieder eine Basis des \mathbb{R}^3 ?
4. (a) Erläutern Sie die Beziehung zwischen einer Lineartransformation und den Spalten ihrer Matrixdarstellung bezüglich einer Basis.
(b) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lineartransformation ϕ ist bezüglich der kanonischen Basis durch A gegeben. Bestimmen Sie ihre Darstellung bezüglich der Basis $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

- Bestimmen Sie die Urbilder der Basis B unter der Abbildung ϕ aus Beispiel 4. (Geben Sie die Komponenten dieser Vektoren bezüglich der kanonischen Basis an)
6. (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\psi((x_1, x_2, x_3)^T) = x_1 + 2x_2 + x_3$$

linear ist.

- (b) Bestimmen Sie die Darstellung der Abbildung ψ bezüglich der kanonischen Basis und der Basis B aus Beispiel 4.
- (c) Bestimmen Sie das Bild der Abbildung ψ .
7. (a) Erläutern Sie die Zusammensetzung von Lineartransformationen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die bezüglich der kanonischen Basis durch Matrizen A_f, A_g dargestellt werden. Wie lautet die Darstellung der Abbildung $f \circ g$ bezüglich der kanonischen Basis?
- (b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Zusammensetzung k linearer Abbildungen $f_1, \dots, f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wieder eine Lineartransformation ist.

8. Seien

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung (bezüglich der kanonischen Basis) der Lineartransformation κ , die durch

$$\kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{a}, \quad \kappa(\mathbf{y}) = \mathbf{a}, \quad \kappa(\mathbf{z}) = \mathbf{x},$$

gegeben ist. Wie groß ist die Dimension des Bildes der Abbildung?

9. Bestimmen Sie die Matrix, die Vektoren im \mathbb{R}^3 zunächst am Ursprung spiegelt und danach ihre Länge verdoppelt.
10. Bestimmen Sie die Matrix, die Vektoren im \mathbb{R}^2 orthogonal auf die Gerade g gegeben durch $y = 2x$ projiziert und den Vektor danach um 90° gegen den Uhrzeigersinn dreht.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Matrix, die Vektoren orthogonal auf $x = 0$ projiziert und dann eine Orthogonalbasis, sodass die Gerade g die Form $x' = 0$ hat. Die gesuchte Matrix ergibt sich durch Basistransformation und Multiplikation mit einer Drehmatrix.