# 4. Übungsblatt - Mathematik 2 für MB und VT - WS 2012/13

1. Erläutern Sie den Begriff des Ranges einer Matrix und formulieren Sie das Rangkriterium.

2. Sind die folgenden Gleichungssysteme in $w, x, y, z$ lösbar? Bestimmen Sie in diesem Fall die Dimension des Lösungsraumes.

$$\begin{aligned} w - x + 3y + 3z &= 0 \\ 2w - 2x + y - z &= 0 \\ x - y + 4z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ 4x + 2y - 2z &= 2 \end{aligned} \qquad w + z = 0$$

3. Sind die folgenden Gleichungssysteme lösbar? Bestimmen Sie in diesem Fall alle Lösungen.

$$\begin{aligned} -7x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ -5x_1 + 7x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x + y + 2z &= -3 \end{aligned}$$

4. (a) Formulieren Sie die Cramer'sche Regel.

   (b) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, für das die Cramer'sche Regel nicht anwendbar ist.

   (c) Verwenden Sie die Cramer'sche Regel, um $x_n$ zu bestimmen, wenn

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ n & n & n & n & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Lösen Sie die Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -6 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

6. Ist das folgende Gleichungssystem lösbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Lösung und die Dimension des Lösungsraumes.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7. Bestimmen Sie Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, sodass das folgende Gleichungssystem (a) keine Lösung besitzt, (b) eine Lösung besitzt oder (c) unendlich viele Lösungen besitzt und bestimmen Sie jeweils den Lösungsraum.

$$ax_1 + ax_2 = 0, \qquad 2x_1 + bx_2 = 4, \qquad x_1 + x_2 = b.$$

8. (a) Erläutern Sie den Begriff der positiven Definitheit einer Matrix und geben Sie ein Beispiel an. Formulieren Sie das Hauptminorenkriterium.

   (b) Erklären Sie Vor- und Nachteile iterativer Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

9. (a) Erläutern Sie die Ausgleichsrechnung. Unter welchen Voraussetzungen ist sie anwendbar und wie ist das Ergebnis geometrisch zu interpretieren?

   (b) Gegeben ist das Gleichungssystem

$$x + y = 1, \qquad x - y = 0, \qquad x = 1.$$

   Bestimmen Sie die Lösung $\tilde{x}, \tilde{y}$ des zugehörigen Ausgleichsproblems und zeigen Sie, dass $f'(\tilde{x}) = 0 = g'(\tilde{y})$, wobei

$$\begin{aligned} f(x) &:= (x + \tilde{y} - 1)^2 + (x - \tilde{y})^2 + (x - 1)^2, \\ g(y) &:= (\tilde{x} + y - 1)^2 + (\tilde{x} - y)^2 + (\tilde{x} - 1)^2. \end{aligned}$$

10. Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungssysteme keine Lösung besitzen und bestimmen Sie die Lösung des Ausgleichsproblems.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$