

5. Übungsblatt - Mathematik 2 für MB und VT - WS 2012/13

1. Erläutern Sie die Begriffe Eigenvektor und Eigenwert einer Matrix.
2. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer quadratischen Matrix A genau die Lösungen der Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$ sind.
3. (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren dieser Matrix eine Basis des \mathbb{R}^2 bilden und finden Sie die Darstellung dieser Matrix bezüglich dieser Basis.
 - (c) Geben Sie eine Matrix V an, sodass $V^{-1}MV$ Diagonalgestalt hat.
4. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen.

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Erläutern Sie den Begriff der orthogonalen Matrix und formulieren Sie den Spektralsatz für reelle symmetrische Matrizen.
- (b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S , welche die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert.

7. Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S , welche die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert. *Hinweis:* Orthonormalisieren Sie dazu eine Basis aus Eigenvektoren zur Matrix C mithilfe des Orthonormalisierungsverfahrens von E. Schmidt.

8. (a) Seien Vektoren

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

gegeben. Bestimmen Sie eine Matrix A mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$, und den zugehörigen Eigenvektoren \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 , \mathbf{b}_3 .

- (b) Berechnen Sie, wenn möglich, A^{17} und A^{-1} .

9. Bringen Sie die folgenden quadratischen Formen auf Hauptachsenform. Geben Sie außerdem die orthogonale Matrix an, die zwischen den alten und den neuen Koordinaten transformiert.

(a) $q(x, y) = 6x^2 + 4xy + 3y^2$,

(b) $p(x, y) = 6x^2 + 4xy$,

(c) $r(x, y) = -x^2 - 6xy + y^2$.

10. Bestimmen Sie den Flächentyp der Flächen im \mathbb{R}^3 , die durch folgende Gleichungen gegeben sind.

(a) $x^2 - 2xy + 2xz = 2$,

(b) $2xy - 2xz + 2yz + z^2 = 1$.