6. Übungsblatt - Mathematik 2 für MB und VT - WS 2012/13

1. Erläutern Sie die partielle Ableitung, die Richtungsableitung und den Gradienten einer Funktion. Erklären Sie außerdem den Schwarzschen Vertauschbarkeitssatz und die Kettenregel anhand eines Beispiels.

2. (a) Sei $g(x, y) = 2x^2 + yx + y$. Bestimmen Sie die Tangentialebene der Fläche $z = g(x, y)$ an der Stelle $(-1, 1, g(-1, 1))$.

   (b) Sei $f(x, y) = \ln(x^2y^3)$. Bestimmen Sie das Schmiegparaboloid der Fläche $z = f(x, y)$ an der Stelle $(1, 1, f(1, 1))$. Ist der Flächenpunkt $(1, 1, f(1, 1))$ elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch?

3. Sei $h(x, y) = x + e^{-x^2-y^2}$.

   (a) Berechnen Sie den Gradienten von h und die Richtungsableitung in Richtung $(1, 0)$, $(0, 1)$ und $(2^{-1/2}, 2^{-1/2})$.

   (b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung von $t(x, y) = \arctan(2x + y)$ mit Entwicklungspunkt $(0, 1)$.

4. Formulieren Sie das Leibnizsche Kriterium für innere Extremstellen und erläutern Sie die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

5. Erklären Sie den Begriff lokales (bzw. globales) Extremum. Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema folgender Funktionen auf $\mathbb{R}^2$:

$$a(x, y) = \cos(x)e^{\sin(y)}, \qquad b(x, y) = |\sin(y)|.$$

6. Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion $f(x, y) = x^2 - y$ unter (a) der Nebenbedingung $x + y = 0$ bzw. unter (b) der Nebenbedingung $x^2 - y^2 = 0$

7. Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion $f(x, y) = \sin(x)y^2$ unter der Nebenbedingung $xy = 0$.

8. Es sei $D = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \leq 4\}$ und f die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2\,(1 - y)$.

   (a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion f im Inneren von D.

   (b) Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion f am Rand $(x^2 + y^2 = 4)$ von D.

   (c) Geben Sie die globalen Extrema der Funktion f auf D an.

9. Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion $f(x, y) = y^2x^3 + xy$ auf $Q = \{(x, y) : \ -1 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 1\}$.

10. Sei die quadratische Form $q(x, y) = x^2 + 6xy + y^2$ gegeben.

   (a) Bringen Sie die quadratische Form auf Hauptachsenform.

   (b) Bestimmen Sie die Extremstellen der transformierten Form unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

   (c) Was bedeutet dies für die Extremstellen der ursprünglichen Form unter dieser Nebenbedingung? *Hinweis:* Skriptum, Seite 69.