8. Übungsblatt - Mathematik 2 für MB und VT - WS 2012/13

1. Erläutern Sie den Begriff Potentialfeld, das Kriterium für Potentialfelder und den Satz über Kurvenintegrale auf Potentialfeldern. Geben Sie ein Beispiel eines Potentialfeldes an.

2. Welche der folgenden Vektorfelder sind Potentialfelder? Bestimmen Sie für diese Felder eine Potentialfunktion.

$$\mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y+1 \\ x+1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 + \sin(x) \\ 2x^3y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos(y)xe^x \end{pmatrix}.$$

3. Sei

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{-x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $P(x,y) = \arctan x - \arctan \frac{y}{x} + \arctan \frac{1}{x}$ eine Potentialfunktion von $\mathbf{v}$ ist.

   (b) Sei $C = \{(x,y) : \; x^2 + y^2 = 1\}$ der Rand des Einheitskreises. Berechnen Sie

$$\int_C \mathbf{v}(\mathbf{x}) \; \mathrm{d}\mathbf{x}$$

   und erklären Sie Ihr Ergebnis.

4. Sei C die Kurve im $\mathbb{R}^2$, die geradlinig von $(1,0)$ nach $(2,1)$ nach $(0,0)$ verläuft. Parametrisieren Sie die Kurve C und berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \begin{pmatrix} 3e^x \\ \sin(x) \end{pmatrix} \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

5. Sei D das Gebiet, das durch x^2 und $2-x^2$ begrenzt ist und C sein Rand. Berechnen Sie $\int_C \mathbf{v}_i \; \mathrm{d}\mathbf{x}$ für $i = 1, 2$, wobei

$$\mathbf{v}_1(x,y) = \begin{pmatrix} -2xy \\ x^2 + y^2, \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{v}_2(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

6. (a) Erläutern Sie die Definition des Oberflächenintegrals einer Funktion f und den Satz über die Rückführung auf Doppelintegrale.

   (b) Sei F die Oberfläche der Kugel mit Radius R. Berechnen Sie

$$\iint_F x^3 + xy^2 + 1 \; \mathrm{d}O.$$

   Hinweis: Kugelkoordinaten (Formelsammlung).

7. Sei $Q = \{(x,y,z): \; 0 \le x,y,z \le 1\}$ ein Würfel mit Kantenlänge 1 im $\mathbb{R}^3$ und F seine Oberfläche. Bestimmen Sie das Integral

$$\iint_F x^2yz \; \mathrm{d}O.$$

8. Sei F jener Teil der Ebene $x + 2y + z = 1$, der im 1. Oktanten $(x,y,z \ge 0)$ liegt. Berechnen Sie den Schwerpunkt dieses Flächenstücks $(\rho = 1)$.

9. (a) Erläutern Sie die Definition des Oberflächenintegrals eines Vektorfeldes $\mathbf{v}$ und den Satz über die Rückführung auf Doppelintegrale. Erklären Sie insbesondere den Unterschied zwischen "$\mathrm{d}\,O$" und "$\mathrm{d}\,\mathbf{O}$".

   (b) Verwenden Sie Zylinderkoordinaten, um die Oberfläche F des Zylinders $Z = \{(x,y,z): \; x^2 + y^2 = 2, \; 0 \le z \le 1\}$ zu parametrisieren. Berechnen Sie

$$\iint_F \begin{pmatrix} x+1 \\ y+z \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}\mathbf{O}.$$

10. Sei $F = \{(x,y,z): \; x^2 + y^2 = 4z^2, \; 0 \le z \le 4\}$. Bestimmen Sie

$$\iint_F \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}\mathbf{O}.$$