9. Übungsblatt - Mathematik 2 für MB und VT - WS 2012/13

1. (a) Zeigen Sie, dass $y(x) = \tan(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = 1+y^2$ mit $y(0) = 0$ ist.

   (b) Erklären Sie anhand einer Skizze, warum dieses Beispiel zeigt, dass die Lösungen von Differentialgleichungen nicht immer auf ganz $\mathbb{R}$ existieren.

2. (a) Erläutern Sie den Satz über die Lösbarkeit der Differentialgleichungen vom Typ der getrennten Variablen.

   (b) Seien $a, b > 0$. Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichung

   $$P' = aP - abP^2$$

   in Abhängigkeit von $P(0)$. Bestimmen Sie außerdem $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

3. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen

   (a) $y'(x) = y(x)(1 + 4x^2)$,

   (b) $y'(x) = x(1 + 4y(x)^2)$

   und skizzieren Sie das Richtungsfeld.

4. Lösen Sie die Differentialgleichungen

   (a) $y'(x) = \cos(x)\sin(x)e^{y(x)}$, $y(0) = 1$,

   (b) $y'(x) = xe^{-x}y(x) - y(x)\sin(x)$, $y(0) = 1$.

5. (a) Erläutern Sie den Satz über die Lösbarkeit exakter Differentialgleichungen, das Exaktheitskriterium und den Satz über integrierende Faktoren.

   (b) Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $ydx - xdy = 0$, die $y(1) = \pi$ erfüllt.

6. Bestimmen Sie implizite Darstellungen der Lösungen der Differentialgleichungen

   (a) $y - 2xy^2 + (x - 2x^2y)y' = 0$,

   (b) $\cos(y) + (-x\sin(y) + (1 + y)e^y)y' = 0$.

   Verwenden Sie den Satz über die Bestimmung von Stammfunktionen für zumindest eine der Differentialgleichungen.

7. Bestimmen Sie implizite Darstellungen der Lösungen der Anfangswertprobleme

   (a) $3\,e^{x-y} - (3e^{x-y}y - 3e^{x-y})\,y' = 0$, $y(0) = 1$.

   (b) $(3x\cos(x) - x^2\sin(x))y + x^2\cos(x)y' = 0$, $y(\pi) = \pi^3$.

8. Lösen Sie die Anfangswertprobleme

(a) $y' = xy + x^3$, $y(0) = 1$.

(b) $y' = x + \frac{1}{x}y$, $y(1) = \pi$,

(c) $y' = \sin(x)y + \sin(x)$, $y(0) = 1$.

9. Lösen Sie die folgende Differentialgleichung durch die Substitution $z(x) = xy(x^3)$:

$$3x^3y'(x^3) + (x^2 + 1)y(x^3) = 0.$$

10. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der Bernoullischen Differentialgleichungen

$$y' + y - y^4 = 0 \qquad \text{und} \qquad y' + x^3y + x^3\frac{1}{y} = 0.$$