1. Übungsblatt - Mathematik 3 für MB, WI-MB und VT - SS 2012

1. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos nx \, dx, \qquad \int_0^{2\pi} \sin kx \sin nx \, dx, \qquad \int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx \, dx$$

   für $k = 1, 2, 3 \ldots$ und $n = 0, 1, 2, \ldots$ und geben Sie eine ortho**normale** Menge von trigonometrischen Funktion in $C[0, 2\pi]$ an.

   Hinweis: Verwenden Sie die Identitäten

$$\cos(k+n)x = \cos kx \cos nx - \sin kx \sin nx \tag{1}$$
$$\sin(k+n)x = \sin kx \cos nx + \cos kx \sin nx \tag{2}$$

   um nicht so viele Integrale explizit berechnen zu müssen.

2. Erklären Sie, wie man die Transformation $x \mapsto 2\pi \frac{x-a}{b-a}$ verwenden kann, um ein Orthonormalsystem für $C[a, b]$ zu erhalten. Geben Sie ein solches Orthonormalsystem an!

3. (a) Finden Sie die Orthogonal-Projektion von $v = (0, 3, 3) \in \mathbb{R}^3$ auf den Unterraum, der von den beiden (nicht orthonormalen!) Vektoren $\phi_1 = (1, 1, 0)$ und $\phi_2 = (1, 0, 2)$ aufgespannt wird.

   (b) Finden Sie die Orthogonal-Projektion von $f(x) = 1 + e^{-x} \in C[0, 1]$ auf den Unterraum, der von den beiden (nicht orthonormalen!) Vektoren $\phi_1(x) = 1$ und $\phi_2(x) = x$ aufgespannt wird.

4. (a) Argumentieren Sie: Ist $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion, dann gilt für die Fourier-Koeffizienten $b_n = 0$ für alle $n \geq 1$.

   (b) Argumentieren Sie: Ist $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion, dann gilt für die Fourier-Koeffizienten $a_n = 0$ für alle $n \geq 0$.

   (c) Geben Sie jeweils eine Funktion an, welche (i) gerade (ii) ungerade (iii) gerade und ungerade (iv) weder gerade noch ungerade ist, an!

5. Entwickeln Sie die Funktion $f(t) = |\cos(t)|$ in eine Fourierreihe auf dem Intervall $[0, \pi]$.

6. Setzen Sie die Funktion $f(t) = t$ vom Intervall $[0, 1]$ gerade (!) auf das Intervall $[-1, 1]$ fort und entwickeln Sie die so erhaltende Funktion dort in eine Fourierreihe. Wie lautet die Parseval'sche Gleichung für f?

7. Setzen Sie die auf dem Intervall $[-\pi, \pi)$ definierte Funktion $f(t) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} t)$ periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort und entwickeln Sie in eine Fourierreihe. Bestimmen Sie durch direktes Einsetzen das Konvergenzverhalten der Fourierreihe an den Stellen $t = 0$ und $t = \pm\pi$.

8. Betrachten Sie die periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in [-\pi, 0) \\ t & \text{für} \quad x \in [0, \pi) \end{cases}$$

   auf $\mathbb{R}$ und berechnen Sie die Fourierreihe von f' bzw. von F, wobei F eine Stammfunktion von f sein soll.