Diskrete und geometrische Algorithmen
Übung 10

18. Dezember 2023

1. Gegeben ist eine Menge D von Damen, eine Menge H von Herren, wobei $|H| \geq |D|$. Weiters ist eine Freundschaftsrelation $R \subseteq D \times H$ gegeben. Eine zulässige Heirat ist definiert als eine Mehrfachhochzeit, sodass jede Dame genau einen Herren heiratet, mit welchem sie auch befreundet ist.
   Der Heiratssatz besagt folgendes: Wenn jede Teilmenge von Damen $D' \subseteq D$ insgesamt mit mindestens $|D'|$ Herren befreundet ist, dann existiert eine zulässige Heirat. Beweisen Sie den Heiratssatz, indem Sie ihn in ein Problem zur Bestimmung eines maximalen Flusses übersetzen.

2. Beweisen Sie, dass je zwei Basen eines (endlichen) Matroids gleich mächtig sind.

3. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Das Mengensystem $\mathcal{T}$ sei definiert durch

$$\mathcal{T} = \{T \subset E \mid T \text{ induziert einen aufspannenden Baum in G}\}.$$

   a) Zeigen Sie, dass $(E, \mathcal{T})$ zwar die Austauscheigenschaft erfüllt, aber kein Unabhängigkeitssystem ist.

   b) Erfüllt das System $(E, \tilde{\mathcal{T}})$, mit $\tilde{\mathcal{T}} = \{\tilde{T} \subset E \mid \exists\, T \in \mathcal{T} \text{ mit } \tilde{T} \subset T\}$, die Austauscheigenschaft, und/oder ist es ein Unabhängigkeitssystem?

4. Ein *ägyptischer Bruch* ist eine endliche Summe von verschiedenen Stammbrüchen, d.h. Brüchen der Form $\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (der Name leitet sich davon ab, dass die Ägypter in der Antike nur Stammbrüche kannten, nicht aber die Schreibweise eines Bruchs als „Zähler durch Nenner“).
   Wir wollen einen Bruch $\frac{a}{b} < 1$ mit $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ als ägyptischen Bruch darstellen. Betrachten Sie dazu folgenden Greedy-Algorithmus:

   - Bestimme den größten Stammbruch $\frac{1}{n_1}$ mit $\frac{1}{n_1} \leq \frac{a}{b}$ (also jenes n_1 mit $\frac{1}{n_1} \leq \frac{a}{b} < \frac{1}{n_1 - 1}$).
   - Berechne $\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{a_1}{b_1}$.

- Wende das Verfahren auf $\frac{a_1}{b_1}$ an, usw.
- Ist $a_i = 1$, so terminiert der Algorithmus. Erhalte Darstellung $\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_i} + \frac{1}{b_i}$.

(a) Wenden Sie obigen Algorithmus auf $\frac{a}{b} = \frac{7}{8}$ an.
(b) Beweisen Sie, dass obiger Greedy-Algorithmus tatsächlich terminiert.
Hinweis: Beweisen Sie, dass $n_1 = \lceil \frac{b}{a} \rceil$ und dass daraus folgt, dass $a > a_1$. Dann lässt sich mit Induktion folgern, dass $a > a_1 > a_2 > \dots$.
(c) Allerdings ist die durch den Greedy-Algorithmus erhaltene Lösung nicht optimal (weder in dem Sinne, dass möglichst wenig Brüche verwendet werden, noch in dem Sinne, dass der größte auftauchende Nenner minimal ist). Weisen Sie dies am Beispiel $\frac{a}{b} = \frac{9}{20}$ nach.
Hinweis: Finden Sie eine Darstellung $\frac{9}{20} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ und vergleichen Sie diese mit dem Output des Algorithmus.

5. Gegeben seien n endliche Mengen $S_1, S_2, \dots, S_n$. Wir wollen die minimale Anzahl $m \leq n$ an Mengen finden, sodass ihre Vereinigung (genannt T) gleich der Vereinigung $R := \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ aller Mengen ist.

   Hier ist ein Greedy-Algorithmus, der dieses Problem löst:
   (1) Setze zunächst $T = \emptyset$.
   (2) Wähle nun die Menge S_k mit der höchsten Kardinalität. Setze dann $T = T \cup S_k$.
   (3) Wähle unter den verbleibenden (d.h. den noch nicht gewählten) Mengen diejenige, welche die meisten Elemente in $R \setminus T$ hat. Nenne diese Menge S_p. Setze anschließend $T = T \cup S_p$.
   (4) Wiederhole Schritt (3) bis $T = R$ gilt.

   (a) Führen Sie alle Schritte des Algorithmus für folgenden Beispiel aus:
   $$n = 3, R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, S_1 = \{1, 2, 3, 4\}, S_2 = \{2, 3, 5\}, S_3 = \{5, 6\}.$$
   (b) Beweisen Sie, dass die durch den Greedy-Algorithmus erhaltene Lösung nicht optimal ist.

6. Wie wir wissen gilt für die Fibonacci-Zahlen F_n die explizite Formel
   $$F_n = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{mit} \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$
   Man zeige nun, dass der Aufruf $\textsc{Euclid}(a, b)$ für $a > b \geq 1$ höchstens $1 + \log_\phi(b)$ rekursive Aufrufe durchführt. Man zeige weiters, dass man diese Schranke sogar auf $1 + \log_\phi(b/\mathrm{ggT}(a, b))$ verbessern kann.