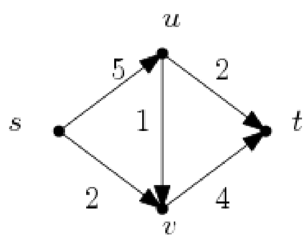
Diskrete und geometrische Algorithmen
Übung 12

15. Jänner 2024

1. Ein Landwirt hat 20ha Land, die er mit Kraut und Rüben bepflanzen will, wobei er möglichst viel Gewinn machen möchte. Ein Hektar Kraut bringt 1000€, ein Hektar Rüben 2000€. Pro Hektar Rüben und Woche hat er einen Arbeitsaufwand von einer Stunde, beim Kraut sind es drei Stunden. Pro Woche stehen 40 Stunden Arbeitszeit zur Verfügung. Um eine Monokultur zu vermeiden, die auf Dauer nicht gut für den Boden wäre, möchte er mindestens 4ha Kraut, sowie 4ha Rüben anbauen. Übersetzen Sie diesen Sachverhalt in ein Problem der linearen Optimierung und lösen Sie dieses
   (a) geometrisch
   (b) indem Sie es auf Standardform bringen und anschließend das Simplex-Verfahren anwenden.

2. Finden Sie in folgendem Graphen einen maximalen Fluss von s nach t indem Sie



   (a) den Algorithmus von Ford-Fulkerson verwenden.
   (b) die Fragestellung als ein Problem der linearen Optimierung formulieren und dieses lösen.

3. Entwerfen Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n^2 \log n)$, der herausfindet, ob es in einer n-elementigen Punktmenge drei kollineare Punkte gibt.
   Hinweis: Betrachten Sie den Anstieg der Gerade zwischen zwei Punkten.

4. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *konvex*, wenn für je zwei Punkte $a, b \in A$ auch die Verbindungsstrecke zwischen a und b in A liegt.
   Die *konvexe Hülle* einer Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist die kleinste konvexe Menge K mit

$B \subseteq K$.

Folgender Algorithmus ist ein Divide-and-Conquer-Algorithmus zum Berechnen der konvexen Hülle einer endlichen Punktmenge P. Der Output sind jene Punkte, die Eckpunkte der konvexen Hülle sind

1.) Falls $|P| \leq 3$ kann die konvexe Hülle direkt ermittelt werden. Für $|P| = 1$ oder 2 ist $\text{Hull}(P) = P$, für $|P| = 3$ ist $\text{Hull}(P) = P$, falls die drei Punkte ein Dreieck aufspannen bzw. die Endpunkte der Gerade, falls die drei Punkte auf einer Gerade liegen.
2.) Ist $|P| > 3$, so teile P in zwei Mengen P_ℓ und P_r, wobei P_ℓ aus derjenigen Hälfte der Punkte mit den niedrigeren x-Koordinaten besteht (linke Hälfte) und P_r aus der rechten Hälfte der Punkte
3.) Berechne rekursiv $HP_\ell = \text{Hull}(P_\ell)$ und $HP_r = \text{Hull}(P_\ell)$.
4.) Fügen Sie die beiden konvexen Hüllen zu einer gemeinsamen konvexen Hülle zusammen, indem Sie den Punkt mit der höchsten y-Koordinate in $HP_\ell \cup HP_r$ finden und von ihm ausgehend die obere Tangente an die andere Menge legen, ebenso mit dem Punkt mit der niedrigsten y-Koordinate. Alle Punkte, die im Inneren des Bereichs zwischen der beiden Tangenten liegen, können Sie verwerfen, da sie nicht zur konvexen Hülle gehören können.

(a) Illustrieren Sie die Arbeitsweise des Algorithmus anhand folgender Punktemenge:

$$\{(2,0),(6,0),(3,2),(0,3),(5,3),(11,3),(1,5),(8,5),(12,5),(4,6),(10,7),(0,8),(4,9)\}.$$

(b) Begründen Sie, warum Schritt 1.) in $\Theta(1)$ möglich ist.

(c) Analysieren Sie die Laufzeit des obigen Algorithmus. Dass der Median einer Menge in $\Theta(n)$ gefunden werden kann (und somit auch die Aufteilung in linke und rechte Hälfte in $\Theta(n)$ bewerkstelligt werden kann), darf vorausgesetzt werden.

5. Das Museumswächterproblem: Gegeben sei ein Polygon P. Wähle nun möglichst wenige Punkte $p_1, \dots, p_k$ (Wächter) im Inneren des Polygons, sodass jeder Punkt im Inneren des Polygons durch eine Gerade, die ganz in P einschließlich Rand ∂P liegt, mit einem Wächter verbunden werden kann. (Der Name des Problems leitet sich davon ab, dass das Polygon als Grundriss eines Museums interpretiert werden kann und die Wächter als Überwachungkameras, die 360° überblicken, aber nicht durch Wände sehen können, interpretiert werden können.)
Zeigen Sie: Zur Überwachung eines überschneidungsfreien Polygons mit n Seiten sind $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter ausreichend. Geben Sie ein Beispiel eines Polygons an, wo $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächterpunkte notwendig sind.
Hinweis: Zerlegen Sie das Polygon in paarweise disjunkte Dreiecke. Zeigen Sie dann, dass sich die Knoten des durch die Triangulierung entstandene Graphen mit drei Farben so färben lassen, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

6. Wir sagen, dass ein Algorithmus A für ein Maximierungsproblem Approximationsrate $\rho(n)$ hat, falls für jede Eingabe x der Größe n für die von A berechnete Ausgabe mit Kosten c und die optimalen Kosten c^* bei Eingabe x gilt dass $\frac{c^*}{c} \leq \rho(n)$.

   (a) Zeigen Sie, dass für das Stabzerlegungsproblem ein Algorithmus mit Approximationsrate 2 und Laufzeit $O(n)$ existiert.
   Hinweis: Bestimmen Sie i, so dass $\frac{p_i}{i}$ maximal ist. Verwenden Sie dieses p_i auf gierige Weise.

   (b) Zeigen Sie außerdem, dass es kein $c < 2$ gibt, so dass dieser Algorithmus Approximationsrate c hat.