Diskrete und geometrische Algorithmen
Übung 2

16. Oktober 2023

1. Die Folge F_n durch die Rekursion $F_n = 2F_{n-1} + 3F_{n-2} + n$ für $n \geq 2$ mit Anfangswerten $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ definiert.

   a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

   b) Betrachten wir folgenden Algorithmus zur Berechnung von F_n:

      FOLGE(n)
      if $n = 0$ **then**
          return 0
      else if $n = 1$ **then**
          return 1
      else
          return 2 · FOLGE($n - 1$) + 3 · FOLGE($n - 2$)+ n
      end if

      Stellen Sie eine Rekursion für die Anzahl von Additionen $A(n)$ auf, die bei obigen Algorithmus zur Berechnung von F_n gemacht werden müssen.

2. Beantworten Sie folgende Fragen durch Aufstellen und Lösen einer geeigneten Rekursion:

   (a) Wie viele Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es, die keine zwei aufeinanderfolgende Zahlen enthalten?

   (b) Wie viele solche Teilmengen gibt es, wenn man die Zahlen zyklisch anordnet, d.h. wenn man 1 als Nachfolger von n betrachtet?

3. Sei $(G_n)_{n\geq 0}$ die Folge der Quadrate der Fibonacci-Zahlen, also $G_n = F_n^2$. Man überlege sich, dass g_n ebenfalls eine homogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten erfüllt und bestimme diese.

4. (a) Gegeben sei ein Feld aus $n \times 2$ quadratischen Kacheln. P_n sei die Anzahl der Möglichkeiten, das Feld mit Dominosteinen zu pflastern. Hierbei können Dominosteine waagrecht (2×1) oder senkrecht (1×2) auf das Feld gelegt werden. Bestimmen Sie eine Rekursion für P_n.

   (b) Eine wichtige Methode zum Lösen von Rekursionen sind sogenannte erzeugende Funktionen. Dabei ordnet man der Folge $(P_n)_{n\geq 0}$ die Potenzreihe

$$P(z) := \sum_{n\geq 0} P_n z^n$$

   zu und obige Rekursion für P_n lässt sich in eine einfache Funktionalgleichung für $P(z)$ "übersetzen", woraus sich die Funktion $P(z)$ leicht bestimmen lässt. Wie lautet $P(z)$? (Um P_n zu bestimmen, müsste man von $P(z)$ die Koeffizienten ablesen, was nach Partialbruchzerlegung leicht gelingt; das ist hier aber nicht mehr verlangt.)

5. Sei M eine nichtleere Menge. Zeigen Sie, dass es dann genauso viele Teilmengen $A \subseteq M$ mit ungerader Anzahl von Elementen wie solche mit gerader Anzahl von Elementen gibt.

6. Sei X eine endliche Menge und $\mathcal{M}$ eine beliebige Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$. Für alle $x \in X$ bezeichne $r(x)$ die Anzahl aller Mengen $A \in \mathcal{M}$ mit $x \in A$. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{x\in X} r(x) = \sum_{A\in\mathcal{M}} |A|.$$