

Diskrete und geometrische Algorithmen

Übung 3

23. Oktober 2023

- Beweisen Sie die Formel zum Inklusions-Exklusionsprinzip mittels vollständiger Induktion.
 - In einer Menge von n Personen können 10 Personen Deutsch, 9 Englisch, 9 Russisch, 5 Deutsch und Englisch, 7 Deutsch und Russisch, 4 Englisch und Russisch, 3 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n ?
- Sei $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$ und $|A| > n$. Zeigen Sie: Es gibt $x, y \in A$ mit $x \neq y$ derart, dass x ein Teiler von y ist.
- In einem Raum befinden sich n Leute. Manche sind miteinander befreundet, andere nicht (miteinander befreundet sein ist eine symmetrische, nicht-reflexive Relation). Jeder ist mit mindestens einer Person befreundet. Zeigen Sie, dass es zwei Leute gibt, die dieselbe Anzahl Freunde haben.
- Finden Sie für folgende Rekursionen $T(n)$ asymptotische untere und obere Schranken mittels Master-Theorem.
 - $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + n \log n$
 - $T(n) = T(\frac{8n}{9}) + n$
 - $T(n) = 11T(\frac{n}{3}) + n^{1.5}$
 - $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$
 - $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2$
 - $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^3$

5. Gegeben ist die Rekursion

$$a_n = a_{f(n)} + a_{g(n)} + a_{h(n)} + 1$$

für $n > t$ und $a_n = 1$ für $n \leq t$ mit $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+$ und $f(n) + g(n) + h(n) = n$.
Beweisen Sie, dass $a_n = \Theta(n)$ gilt.

6. (a) Zeigen Sie, dass fünf Multiplikationen von Einträgen reichen, um das Quadrat einer 2×2 Matrix zu berechnen.
- (b) Was ist mit folgendem Algorithmus zur Berechnung des Quadrats einer $n \times n$ Matrix falsch?
“Benutze eine Divide & Conquer-Strategie wie in Strassen’s Algorithmus, abgesehen davon, dass wir statt 7 Teilproblemen der Größe $n/2$ nun dank Teil (a) nur 5 Teilprobleme der Größe $n/2$ betrachten müssen. Mittels derselben Argumentation wie in Strassens Algorithmus können wir folgern, dass der Algorithmus in Zeit $O(n^{\log_2 5})$ läuft.”
- (c) In der Tat ist die Matrixmultiplikation nicht schwieriger als das Quadrieren von Matrizen. Zeigen Sie, dass wenn Quadrate von $n \times n$ Matrizen in Zeit $O(n^c)$ berechnet werden können, dann können beliebige zwei $n \times n$ Matrizen in Zeit $O(n^c)$ multipliziert werden.