Diskrete und geometrische Algorithmen
Übung 5

6. November 2023

1. Das Sammelbilderproblem: Ein leidenschaftlicher Sammler versucht, eine vollständige Sammlung von n verschiedenen Sammelbildern zu erhalten. Bei jedem Kauf erhält er zufällig (also jedes Bild mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ und unabhängig von allen bisherigen Käufen) eines von n Sammelbildern. Man berechne die erwartete Anzahl an Bildern, die der Sammler kaufen muss, um eine vollständige Sammlung zu erhalten. Hinweis: Man teile das Problem in n Etappen auf, d.h. man betrachte $\mathbb{E}(X_j)$ für $1 \leq j \leq n$, wobei die Zufallsvariable X_j die Anzahl an Bildern angibt, die man benötigt, um von einer Sammlung von $j-1$ verschiedenen Bildern ausgehend ein bisher noch nicht erhaltenes Bild zu erhalten.

2. (a) Führen Sie alle Schritte des Quicksort-Algorithmus für folgenden Datensatz durch:
$$(3, 1, 8, 2, 7, 4, 6, 5)$$
   (b) Median-of-Three ist eine Variante des Quicksort-Algorithmus, bei der nicht das letzte Element als Pivotelement verwendet wird, sondern es werden die letzten drei Elemente der Liste betrachtet und das der Größe nach mittlere zur Pivotisierung verwendet. Worin liegt der Vorteil von Median-of-Three gegenüber dem gewöhnlichen Quicksort-Algorithmus?

3. Dual-Pivot-Quicksort ist eine Variante von Quicksort, die das Array nicht in zwei, sondern in drei Teilbereiche aufteilt und dann den Algorithmus rekursiv auf diese Teilbereiche anwendet. Dazu wählt man zwei Pivotelemente p, q (etwa das erste und das letzte Element des Arrays), ordnet diese der Größe nach und betrachtet anschließend die drei Teilfelder $\{x : x < p\}, \{x : p \leq x \leq q\}$ und $\{x : q < x\}$ (falls $p \leq q$), beziehungsweise $\{x : x < q\}, \{x : q \leq x \leq p\} und \{x : p < x\}$ (falls $p \geq q$), bis Felder der Länge 0 oder 1 erreicht sind.

   (a) Wenden Sie Dual-Pivot-Quicksort auf den Datensatz
$$2, 5, 3, 8, 9, 6, 4, 1, 7$$
   an, wobei immer das erste und das letzte Element eines Feldes die Pivotelemente sein sollen.

(b) Die Einträge des Arrays A seien durch eine zufällige Permutation der Elemente $\{1, 2, \ldots, n\}$ gegeben. Stellen Sie eine Rekursion für die erwartete Anzahl an Vergleichen bei Dual-Pivot-Quicksort auf. (Das Lösen dieser Rekursion ist <u>nicht</u> verlangt!)

4. Man zeige mit Hilfe der Substitutionsmethode, dass für die Lösung $T(n)$ der Rekursion
$$T(n) = \max_{1 \leq k \leq n} (T(k-1) + T(n-k)) + \Theta(n)$$
das asymptotische Verhalten $T(n) = \Omega(n^2)$ gilt.

5. Welche der Sortieralgorithmen Insertion-Sort, Merge-Sort, Heapsort, Quicksort und Counting-Sort sind stabil? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an!

6. Gegeben seien n ganze Zahlen zwischen 0 und k. Geben Sie einen Algorithmus an, der die Eingabe vorverarbeitet und dann jede Anfrage nach der Anzahl der Zahlen, die im Intervall $[a, b]$ liegen, in der Zeit $\mathcal{O}(1)$ beantworten kann. Ihr Algorithmus sollte für den Vorbereitungsschritt die Zeit $\Theta(n + k)$ benötigen.
Hinweis: Adaptieren Sie Countingsort.