Diskrete und geometrische Algorithmen
Übung 6

13. November 2023

1. Aus einer gegebenen Menge von n verschiedenen Zahlen wollen wir die i größten in sortierter Reihenfolge bestimmen, wobei wir einen vergleichsbasierten Algorithmus verwenden wollen. Überlegen Sie sich für jeden der folgenden Ansätze jeweils einen Algorithmus mit bestmöglicher asymptotischer Laufzeit im schlechtesten Fall und analysieren Sie die Laufzeiten in Abhängigkeit von n und i.

   (a) Sortieren Sie die Zahlen und listen Sie die i größten auf.

   (b) Konstruieren Sie aus den Zahlen eine Max-Prioritätswarteschlange und rufen Sie Extract-Max i-mal auf.

   (c) Verwenden Sie einen Algorithmus zur Bestimmung der Ranggröße, um die i-größte Zahl zu finden, verwenden Sie diese Zahl als Pivotelement, um die Eingabefolge zu partitionieren und sortieren Sie dann die i größten Zahlen.

   Anmerkung: Für (c) dürfen Sie verwenden, dass ein Algorithmus für das Auswahlproblem existiert, welcher dieses im schlechtesten Fall mit $\Theta(n)$ löst.

2. Ein d-ärer Heap ist eine dem binären Heap ähnliche Datenstruktur, wo (bis auf eine Ausnahme) alle inneren Knoten genau d Kinder anstatt 2 Kindern haben. Ein d-ärer Heap ist ein bis auf die unterste Ebene vollständiger d-ärer Baum, die unterste Ebene wird von links nach rechts aufgefüllt.

   (a) Drücken Sie die Höhe eines d-ären Heaps mit n Elementen durch n und d aus.

   (b) Formulieren Sie die Hilfsfunktionen Parent und Child-j (wobei $j = 1, \dots d$) für d-äre Heaps.

   (c) Formulieren Sie die Algorithmen Max-Heapify(A,i) (wobei vorausgesetzt werden darf, dass alle Teilbäume mit Wurzeln Child-j(i) Max-Heaps sind) und Build-Max-Heap für d-äre Heaps.

3. (a) Ein geordnetes k-Tupel $(n_1, \dots, n_k)$ von natürlichen Zahlen $n_i \in \mathbb{N}$ mit $n = n_1 + \cdots + n_k$ nennen wir eine Komposition von n in k Summanden. Geben Sie eine explizite Formel für die Anzahl $C_{n,k}$ der Kompositionen von n in k Summanden ($n, k \in \mathbb{N}$) an (beispielsweise indem Sie die Idee des Beweises der

Formel für die Anzahlen der Auswahlen einer Teilmultimenge verwenden).

(b) Üblicherweise betrachtet man aber (an Stelle der obigen Definition geordnete k-Tupel $(n_1, \ldots, n_k)$ von positiven natürlichen Zahlen, also $n_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $n = n_1 + \cdots + n_k$, welche wir Kompositionen von n in k positive Summanden nennen wollen. Geben Sie nun auch eine explizite Formel für die Anzahl $\tilde{C}_{n,k}$ der Kompositionen von n in k positive Summanden an (beispielsweise indem Sie dieses Problem auf das vorige zurückführen via "Abziehen von 1 bei jedem Summanden").

4. Sei G der vollständige Graph auf 6 Knoten (d.h. 6 Knoten und eine Kante zwischen je 2 von ihnen). Jede Kante ist rot oder blau gefärbt. Zeigen Sie: es existiert in dem Graphen ein Dreieck (induzierter Teilgraph mit 3 Knoten) mit nur roten Kanten oder ein Dreieck mit nur blauen Kanten.

5. Man füge den Datensatz

$$5, 28, 19, 15, 20, 33, 12, 17, 10$$

in eine Hashtabelle mit 9 Positionen ein, wobei $h(k) = k \mod 9$. Kollisionsbehandlung soll durch Verkettung stattfinden.
Fügen Sie denselben Datensatz anschließend in eine andere Hashtabelle ein, für die Sie die Hashfunktion $h(k) = k \mod 13$ verwenden und Kollisionsbehandlung durch lineare Sondierung erfolgt.

6. Geben Sie den AVL-Baum an, der durch Einfügen der Schlüssel $13, 23, 17, 5, 11, 7, 3, 2, 19$ in den leeren Baum entsteht.