Diskrete und geometrische Algorithmen
Übung 7

27. November 2023

1. (a) Sei A die Adjazenzmatrix eines Graphen. Was beschreiben die Einträge von A^k? Beweisen Sie Ihre Behauptung.
   (b) Sei G ein ungerichteter Graph ohne Schlingen und Mehrfachkanten und A seine Adjazenzmatrix. Wie lässt sich unter Zuhilfenahme von A^3 die Anzahl der Zyklen der Länge 3 (geschlossene Kantenfolgen der Länge 3, die wieder zum Ausgangspunkt zurückführen) berechnen?

2. Gegeben sei ein zusammenhängender ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit einer geraden Anzahl an Knoten. Zeigen Sie, dass es einen (nicht notwendigerweise zusammenhängenden) Untergraph mit Knotenmenge V gibt (also einen Graph $G' = (V, E')$ mit $E' \subseteq E$), in dem alle Knotengrade ungerade sind.

3. Ein ungerichteter einfacher (das heißt, er besitzt keine Schlingen und keine Mehrkanten) Graph $G = (V, E)$ heißt bipartit, falls es eine Zerlegung der Knotenmenge V in zwei disjunkte Teilmengen V_1 und V_2 gibt, also $V = V_1 \cup V_2$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, sodass jede Kante in E einen Knoten aus V_1 mit einem aus V_2 verbindet (und somit keine Kanten innerhalb von Knoten aus V_1 bzw. V_2 existieren). Ein bekannter Satz der Graphentheorie sagt aus (ein Beweis ist hier nicht verlangt), dass G genau dann bipartit ist, wenn er keine Kreise ungerader Länge besitzt.

   Überlegen Sie sich einen auf der Breitensuche basierenden Algorithmus, welcher in Laufzeit $O(|V| + |E|)$ entscheiden kann, ob ein gegebener ungerichteter einfacher Graph G bipartit ist und in diesem Fall auch gleich eine Partitionierung von V in zwei Teilmengen V_1 und V_2 liefert.

4. Der Durchmesser eines Graphen ist die maximale Distanz zwischen zwei Knoten. Entwerfen Sie einen effizienten Algorithmus zur Bestimmung des Durchmessers eines Baumes und analysieren Sie dessen Laufzeit.

5. Sei $G = (V, E)$ ein schlichter und ungerichteter Graph. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) G ist ein Baum.
(b) Zwischen je zwei Knoten in G gibt es genau einen Weg.
(c) G ist zusammenhängend und durch Entfernen einer beliebigen Kante verliert G diese Eigenschaft.
(d) G besitzt keine Kreise positiver Länge und durch Hinzufügen einer Kante entsteht ein Kreis.

6. Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$, der keine Schlingen enthält, ist eine $|V| \times |E|$-Matrix $B = (b_{i,j})$ mit

$$b_{i,j} := \begin{cases} -1, & \text{falls Kante } j \text{ aus dem Knoten } i \text{ austritt,} \\ 1, & \text{falls Kante } j \text{ in den Knoten } i \text{ eintritt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beschreiben Sie, was die Einträge des Matrixproduktes $B \cdot B^T$ darstellen (wobei B^T die zu B transponierte Matrix bezeichne).