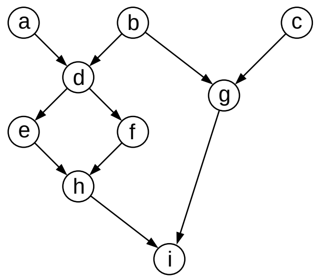
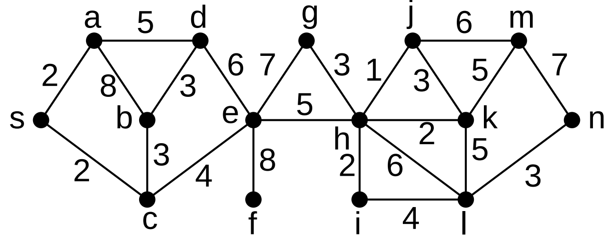
Diskrete und geometrische Algorithmen
Übung 8

4. Dezember 2023

1. Man zeige, dass die Reduktion eines gerichteten Graphens azyklisch ist.
2. Man zeige die Korrektheit des Algorithmus von Prim mittels einer geeigneten Schleifeninvariante.
3. Erklären Sie die Funktionsweise von TOPOLOGICAL-SORT für das topologische Sortieren anhand des nachfolgenden Graphen:



4. Erklären Sie die Funktionsweise der Algorithmen von Kruskal und Prim anhand der Konstruktion eines maximalen Spannbaums (eines spannenden Baums mit maximalen Gewicht) mittels Kruskal's Algorithmus und eines minimalen Spannbaums mittels Prim's Algorithmus für den Wurzelknoten s im folgenden kantenbewerteten Graph:



5. Gegeben sei ein Baum, bestehend aus n Knoten. Die Knoten sind von 1 bis n durchnummeriert, wobei die Wurzel der Knoten mit Label 1 sei. Die Wurzel liegt

auf Ebene 1 des Baums, die Kinder der Wurzel auf Ebene 2, usw. Gegeben sei eine positive ganze Zahl x. Geben Sie einen Algorithmus an, der die Anzahl Knoten auf Ebene x ausgibt.

6. In diesem Beispiel befassen wir uns ausnahmsweise mit unendlichen Bäumen. Ein unendlicher Baum ist hier zu verstehen als ein ungerichteter Graph mit unendlich vielen Knoten, der schlicht, zyklenfrei und zusammenhängend ist, wobei zusammenhängend wie gewohnt die Existenz eines *endlichen* Pfades zwischen je zwei Knoten ausdrückt. Im Kontext dieser Aufgabe werden wir Bäume mit Wurzelbäumen (mit einer beliebig aber fest gewählten Wurzel) identifizieren. Unser Ziel wird es sein, folgenden fundamentalen Satz der infinitären Graphentheorie zu zeigen:

   (Königs Lemma)**.** *Sei (G, E) ein abzählbar unendlich großer Baum, in dem jeder Knoten nur endlich viele Nachbarn hat. Dann existiert in G ein unendlicher Ast.*

   Ein unendlicher Ast ist eine injektive Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_i \sim x_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

   Um Königs Lemma zu zeigen, wenden wir zunächst den DFS-Algorithmus auf den Baum G an, wobei er einen Knoten suchen soll, der sich nicht im Baum befindet.

   a) Argumentieren Sie, dass DFS auf G nicht (in endlich vielen Schritten) terminieren kann.

   b) Sei $c_n(\nu)$ die Farbe des Knoten ν zum Zeitpunkt n. Sei nun die ("finale") Farbe von ν definiert als $\lim_{n\to\infty} c_n(\nu)$. Warum ist diese Begriffsbildung sinnvoll (wenn ein Knoten zwischen zwei Farben während des Ausführung von DFS oszillieren würde, wäre dieser Begriff nicht sinvoll)?

   Wir sehen nun, dass "nach" der Ausführung von DFS jeder Knoten in G eine Farbe hat (im Sinne von Punkt b)). Natürlich können wir nicht davon ausgehen, dass jeder Knoten am Ende schwarz ist - dies würde ja bedeuten, dass der Algorithmus terminiert.

   c) Zeigen Sie, dass die Wurzel von G grau ist.

   d) Zeigen Sie, dass jeder grauer Knoten zumindest ein[1] graues Kind hat.

      Hinweis: Falls ein grauer Knoten ν zumindest ein schwarzes Kind hat, betrachte man den Zeitpunkt, an dem das letzte seiner schwarzen Kinder schwarz gefärbt wurde. Was macht DFS direkt nach diesem Zeitpunkt? Den Fall, dass ν nur weisse Kinder hat, kann man direkt ausschließen. Warum?

   e) Folgern Sie Königs Lemma.

[1]Man sieht auch unschwer, dass es genau eines ist.