

DETERMINANTEN

Definition

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$.

$$\det A := \sum_{\pi \in \mathbf{S}_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \cdots a_{\pi(n),n}$$

Schreibweise:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Beispiel ($n = 2$)

Permutation π	$\text{sgn}(\pi)$	Term in der Summe
$\text{id}_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$+1$	$a_{1,1}a_{2,2}$
$(12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	-1	$a_{1,2}a_{2,1}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Beispiel ($n = 3$) – Die Regel von Sarrus

Permutation π	$\text{sgn}(\pi)$	Term
$\text{id}_{\{1,2,3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	+1	$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$
$(123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	+1	$a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}$
$(132) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	+1	$a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$
$(13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	-1	$a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$
$(23) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	-1	$a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$
$(12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	-1	$a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = aqz + pyc + xbr \\ - xqc - ayr - pbz$$

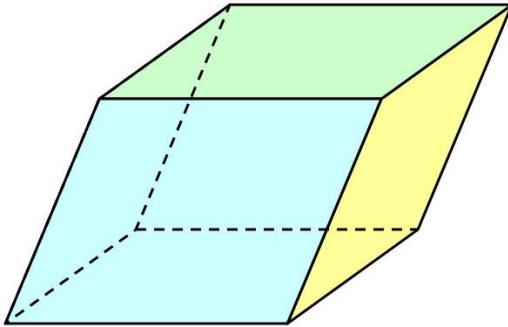
Beispiel

Dreiecksmatrizen:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n}.$$

Permutation π	Term
$\text{id}_{\{1,2,\dots,n\}}$	$a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n}$
$(i_1, i_2, \dots, i_k)\pi'$	$\underbrace{a_{i_2, i_1} a_{i_3, i_2} \cdots a_{i_1, i_k}}_{=0} \Pi'$

Geometrische Interpretation der Determinante



Sei $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und

$$P = \{t_1 \underline{a}_1 + \dots + t_n \underline{a}_n \mid 0 \leq t_1, \dots, t_n \leq 1\},$$

dann ist $|\det A|$ das Volumen von P .

Satz $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann regulär, wenn $\det A \neq 0$.

Satz Für $A, B \in K^{n \times n}$ gilt

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \quad \text{und} \quad \det(A^T) = \det A.$$

Falls A regulär ist, dann gilt auch $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Spaltenumformungen

Satz Sei $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \in K^{n \times n}$ und $\lambda \in K$.

Die Matrix A' gehe aus A durch eine Spaltenumformung hervor.

Dann gilt

Spaltenumformung bei $A \rightsquigarrow A'$	Auswirkung auf die Determinante
$\underline{a}_j \longrightarrow \lambda \underline{a}_j$	$\det(A') = \lambda \det A$
$\underline{a}_j \longrightarrow \underline{a}_j + \lambda \underline{a}_i$	$\det(A') = \det A$
$\underline{a}_i \longleftrightarrow \underline{a}_j$	$\det(A') = -\det A$

Berechnung von Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Berechnung von Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 12 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Berechnung von Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 12 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{z_3 \rightarrow z_3 - 2z_2} \\ \xrightarrow{z_4 \rightarrow 3z_4 - 2z_2 \text{ (!)}} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Berechnung von Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 12 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{z_3 \rightarrow z_3 - 2z_2} \\ \xrightarrow{z_4 \rightarrow 3z_4 - 2z_2 \text{ (!)}} \\ \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\implies \det A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8}{3} = 16$$

Kofaktoren

$$A = (a_{i,j}) \in K^{n \times n}$$

Kofaktor $A_{i,j}$:

$$A_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$D_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} A_{i,j}$$

Kofaktoren

Satz (Entwicklungssatz von Laplace)

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. Dann gilt:

- $\forall i : \det A = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$
- $\forall j : \det A = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

Kofaktoren

Satz (Entwicklungssatz von Laplace)

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. Dann gilt:

- $\forall i : \det A = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$
- $\forall j : \det A = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Vorzeichenmuster: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Kofaktoren

Satz (Entwicklungssatz von Laplace)

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. Dann gilt:

- $\forall i : \det A = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$
- $\forall j : \det A = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Vorzeichenmuster: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Kofaktoren

Satz (Entwicklungssatz von Laplace)

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. Dann gilt:

- $\forall i : \det A = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$
- $\forall j : \det A = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Vorzeichenmuster: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Kofaktoren

Satz (Entwicklungssatz von Laplace)

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. Dann gilt:

- $\forall i : \det A = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$
- $\forall j : \det A = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Vorzeichenmuster: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Kofaktoren

Satz (Entwicklungssatz von Laplace)

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. Dann gilt:

- $\forall i : \det A = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$
- $\forall j : \det A = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = 0.$$

Vorzeichenmuster: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Kofaktoren

Satz $A \in K^{n \times n}$, $\hat{A} := (A_{i,j}) \in K^{n \times n}$

Dann gilt:

$$A \cdot \hat{A}^T = (\det A) \cdot I_n$$

und daher

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \hat{A}^T.$$

Cramersche Regel

Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\det A \neq 0$, z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Cramersche Regel

Gleichungssystem $Ax = b$ mit $\det A \neq 0$, z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$A_1 := \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Cramersche Regel

Gleichungssystem $Ax = b$ mit $\det A \neq 0$, z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$A_1 := \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$x = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \det A_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$