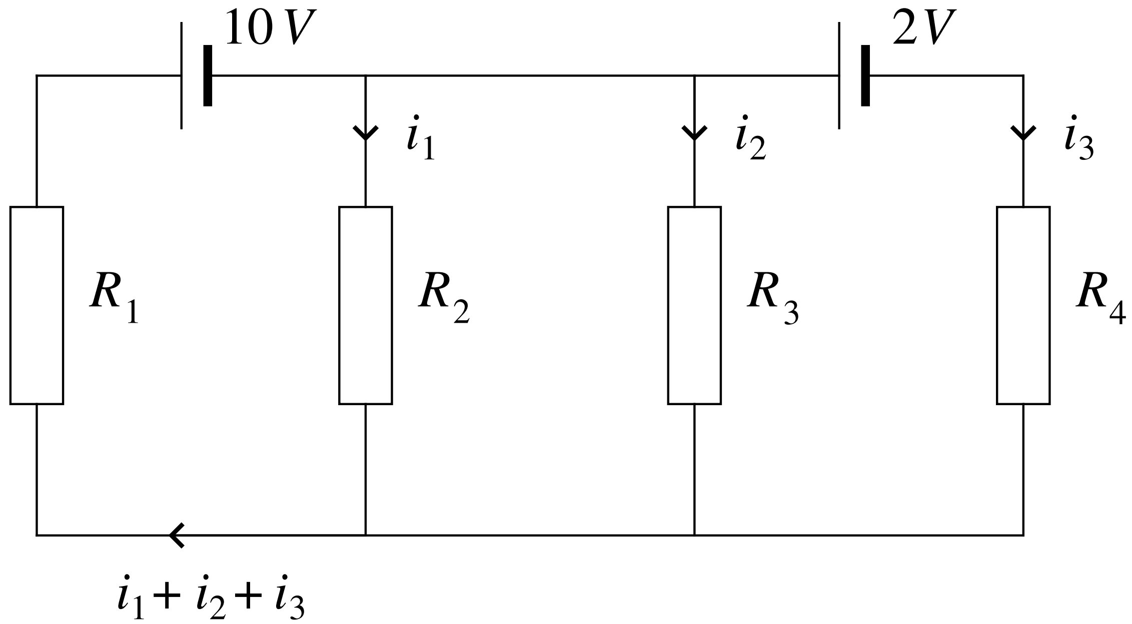
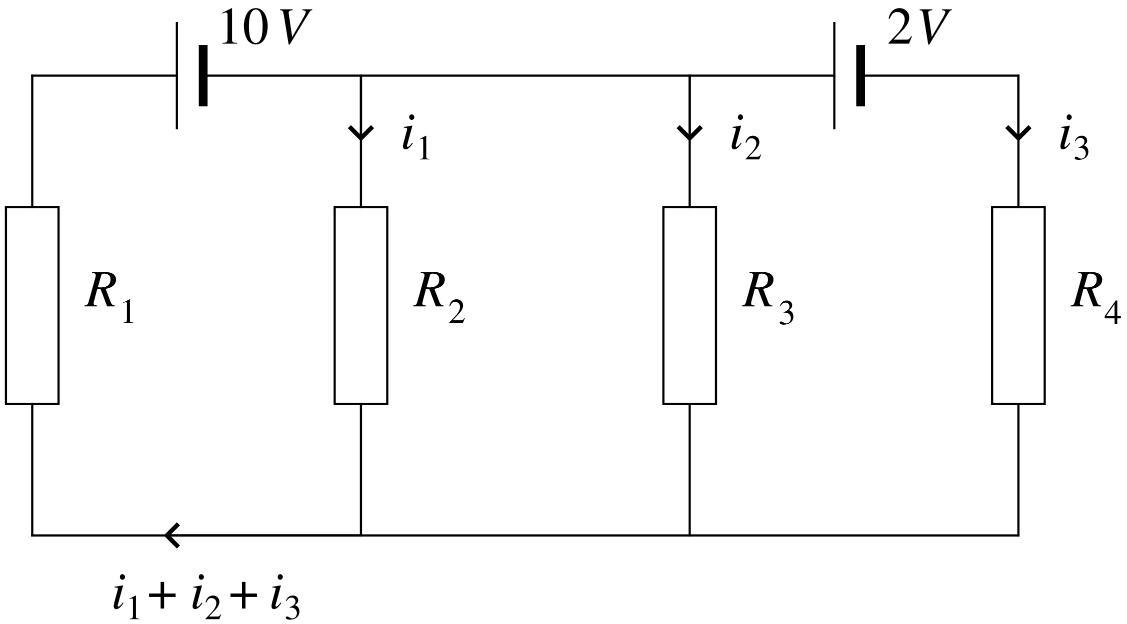
VEKTOREN UND VEKTORRÄUME

Beispiel: Elektrische Netzwerke

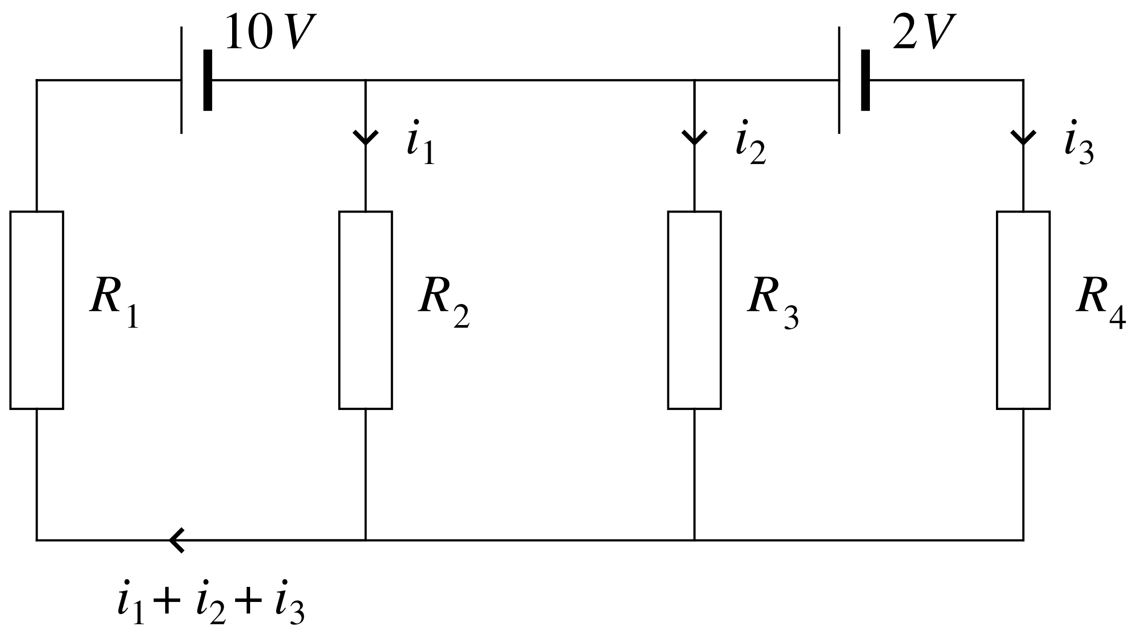


Beispiel: Elektrische Netzwerke



$$
\begin{aligned}
R_2 i_1 + R_1(i_1 + i_2 + i_3) &= 10\,V, \\
R_3 i_2 - R_2 i_1 &= 0\,V, \\
R_4 i_3 - R_3 i_2 &= 2\,V.
\end{aligned}
$$

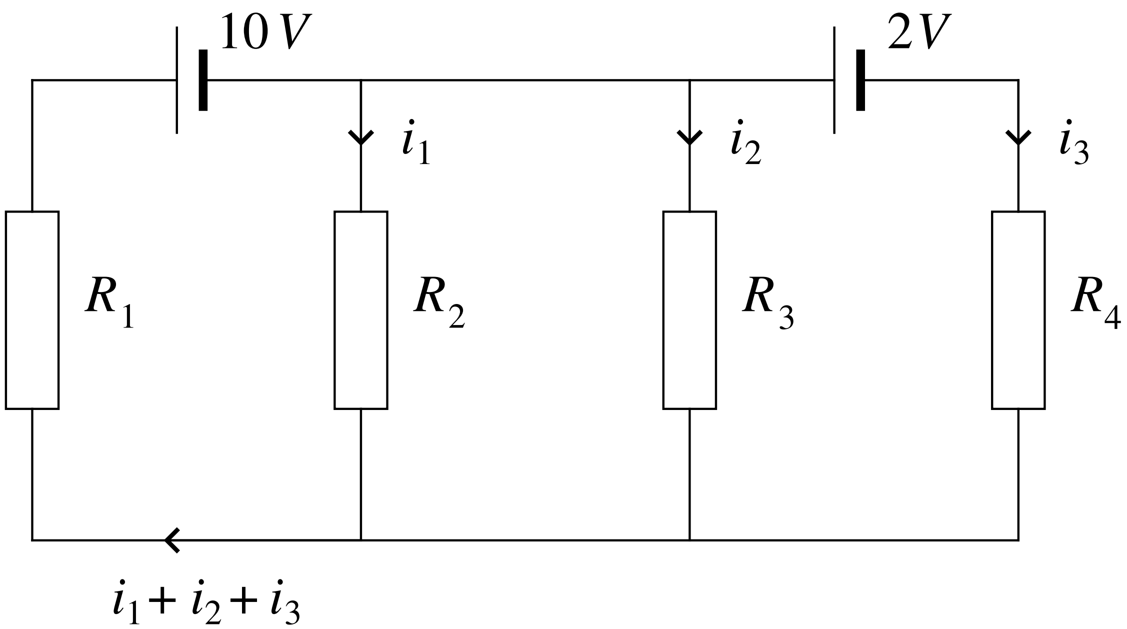
Beispiel: Elektrische Netzwerke



$$\begin{aligned} R_2 i_1 + R_1(i_1 + i_2 + i_3) &= 10\,V, \\ R_3 i_2 - R_2 i_1 &= 0\,V, \\ R_4 i_3 - R_3 i_2 &= 2\,V. \end{aligned}$$

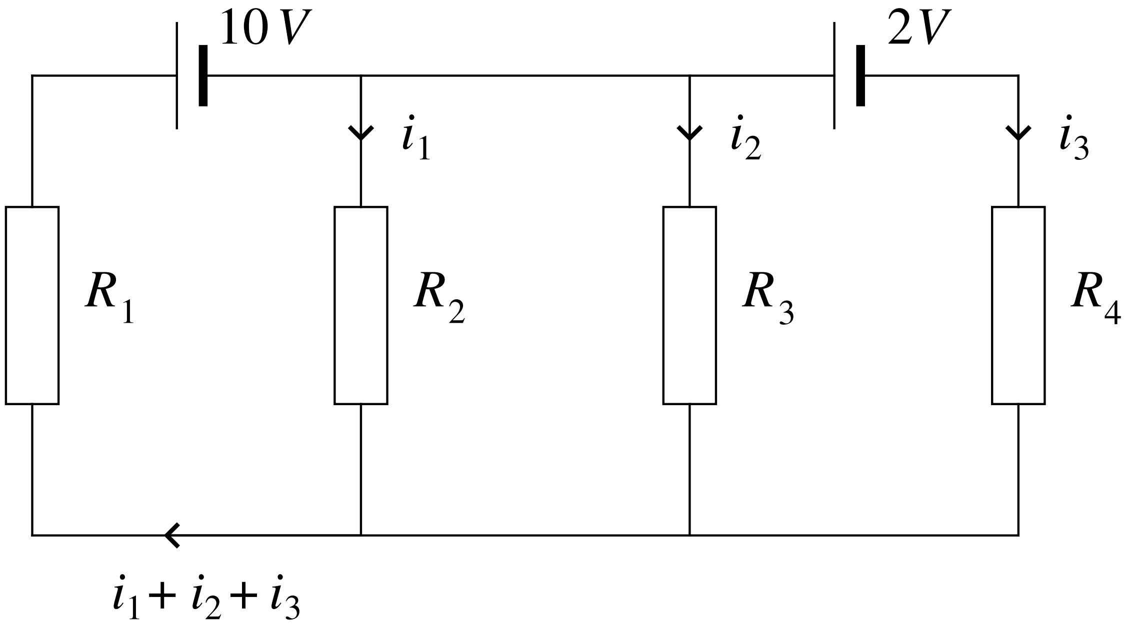
Konkret $R_1 = 1.5\,\Omega$, $R_2 = R_3 = 4\,\Omega$ und $R_4 = 3\,\Omega$

Beispiel: Elektrische Netzwerke



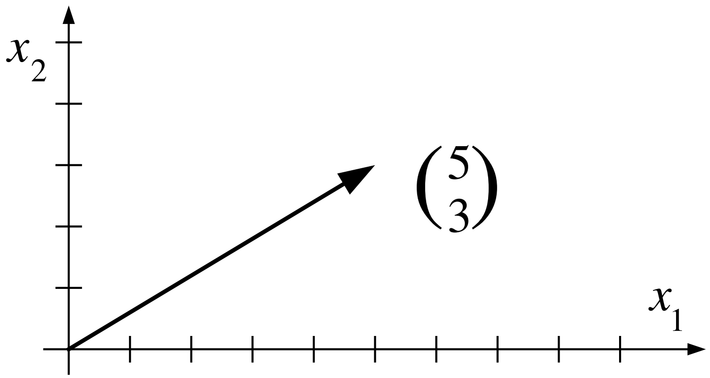
$$\begin{aligned} 5.5\, i_1 + 1.5\, i_2 + 1.5\, i_3 &= 10, \\ -4\, i_1 + 4\, i_2 &= 0, \\ -4\, i_2 + 3\, i_3 &= 2. \end{aligned}$$

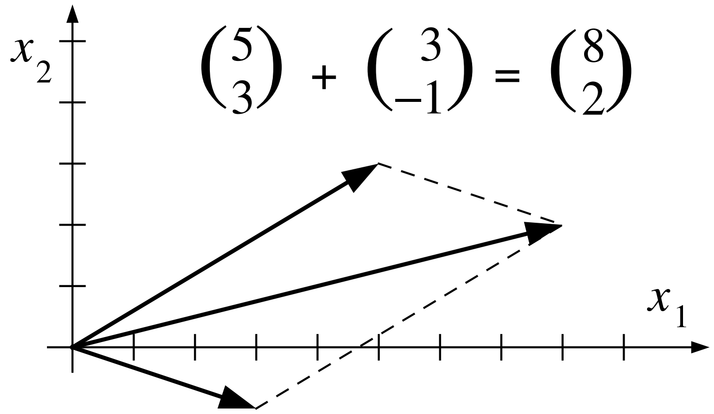
Beispiel: Elektrische Netzwerke



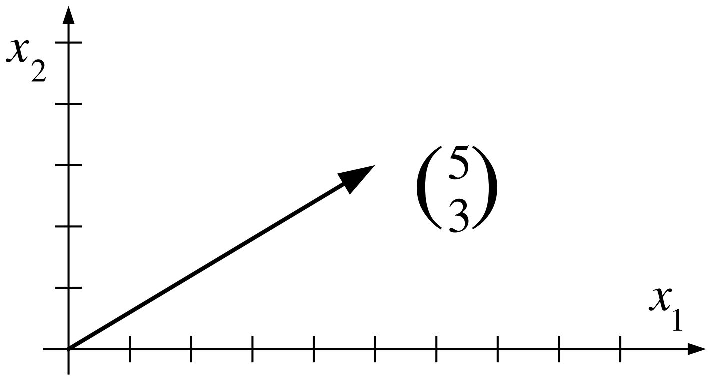
$$
\begin{aligned}
5.5\,i_1 + 1.5\,i_2 + 1.5\,i_3 &= 10, \\
-4\,i_1 + 4\,i_2 &= 0, \\
-4\,i_2 + 3\,i_3 &= 2.
\end{aligned}
\quad\Longleftrightarrow\quad
\begin{pmatrix} 5.5 & 1.5 & 1.5 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.
$$

Vektoren

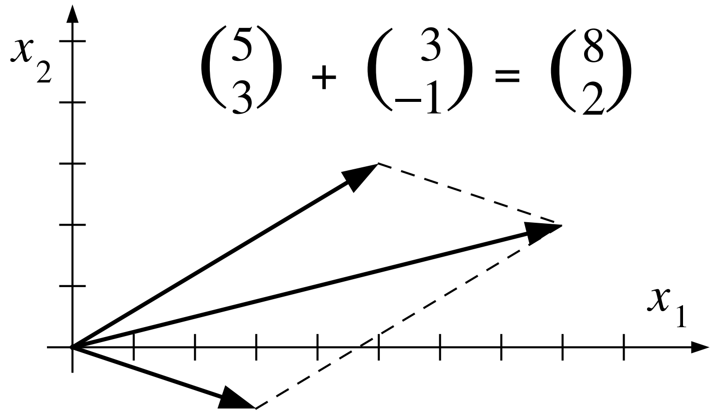

x_2
x_1
$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$


x_2
x_1
$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$

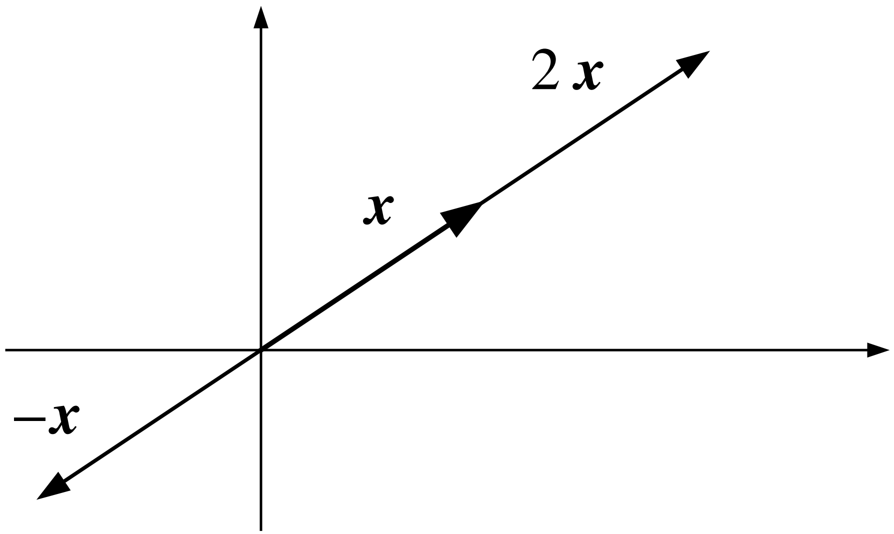
Vektoren



x_2
x_1
$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$



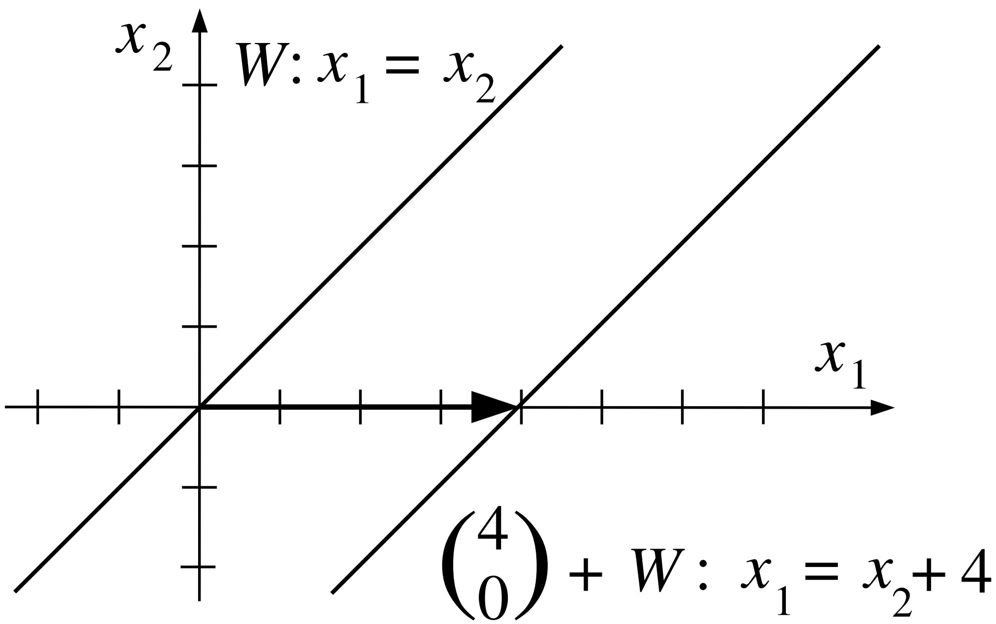
x_2
x_1
$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$



$2\,\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{x}$
$-\boldsymbol{x}$

Vektoren

$$W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 = x_2 \right\}$$



Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder anders angeschrieben

$$\begin{aligned} 1\lambda_1 + 1\lambda_2 - 1\lambda_3 &= 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 &= 0, \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder anders angeschrieben

$$\begin{aligned} 1\lambda_1 + 1\lambda_2 - 1\lambda_3 &= 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 &= 0, \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Es gibt eine nichttriviale Lösung: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -1$
$\Longrightarrow$ die Vektoren sind linear abhängig.

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Folgt aus $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$?

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Folgt aus $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$?

Gleichungssystem bzw. die Vektoren als Matrix geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Folgt aus $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$?

Gleichungssystem bzw. die Vektoren als Matrix geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Longrightarrow \lambda_1 = 0 \\ \Longrightarrow \lambda_2 = 0 \\ \Longrightarrow \lambda_3 = 0 \\ \end{array}$$

MATRIZEN

Rechnen mit Matrizen

Die transponierte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

Die transponierte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

Summe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Skalare Vielfache

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 15 & 21 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc}
 & & & 1 & 2 \\
 & & & 5 & 7 \\
 & & & 0 & 2 \\
\hline
1 & 5 & 2 & & \\
3 & 2 & 1 & & \\
0 & 1 & 2 & & \\
\end{array}$$

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 2 \\ & & & 5 & 7 \\ & & & 0 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 2 & 1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0 & \\ 3 & 2 & 1 & & \\ 0 & 1 & 2 & & \end{array}$$

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc}
 & & & 1 & 2 \\
 & & & 5 & 7 \\
 & & & 0 & 2 \\
\hline
1 & 5 & 2 & 1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \\
3 & 2 & 1 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 2 \\
0 & 1 & 2 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 2
\end{array}$$

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 41 \\ 13 & 22 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc}
 & & & 1 & 2 \\
 & & & 5 & 7 \\
 & & & 0 & 2 \\
\hline
1 & 5 & 2 & 1\cdot 1 + 5\cdot 5 + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + 5\cdot 7 + 2\cdot 2 \\
3 & 2 & 1 & 3\cdot 1 + 2\cdot 5 + 1\cdot 0 & 3\cdot 2 + 2\cdot 7 + 1\cdot 2 \\
0 & 1 & 2 & 0\cdot 1 + 1\cdot 5 + 2\cdot 0 & 0\cdot 2 + 1\cdot 7 + 2\cdot 2
\end{array}$$

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 41 \\ 13 & 22 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 2 \\ & & & 5 & 7 \\ & & & 0 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 2 & 1\cdot 1 + 5\cdot 5 + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + 5\cdot 7 + 2\cdot 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3\cdot 1 + 2\cdot 5 + 1\cdot 0 & 3\cdot 2 + 2\cdot 7 + 1\cdot 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0\cdot 1 + 1\cdot 5 + 2\cdot 0 & 0\cdot 2 + 1\cdot 7 + 2\cdot 2 \end{array}$$

Einheitsmatrix: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rechnen mit Matrizen

A, B, C: Matrizen, λ: Skalar

I: Einheitsmatrix mit passender Anzahl von Zeilen und Spalten

1. $A \cdot I = I \cdot A = A$
2. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
4. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
5. $(\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (A \cdot B)$
6. $(A + B)^T = A^T + B^T$
7. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
8. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$

Bestimmung des Rangs einer Matrix

s_1	s_2	s_3	s_4
1	2	3	4
2	5	-1	2
-2	-3	-12	-13
2	-1	2	-1

Bestimmung des Rangs einer Matrix

s_1	s_2	s_3	s_4
1	2	3	4
2	5	-1	2
-2	-3	-12	-13
2	-1	2	-1

$$\underset{\substack{s_2 \to s_2 - 2s_1 \\ s_3 \to s_3 - 3s_1 \\ s_4 \to s_4 - 4s_1}}{\longrightarrow}$$

Bestimmung des Rangs einer Matrix

s_1	s_2	s_3	s_4
1	2	3	4
2	5	−1	2
−2	−3	−12	−13
2	−1	2	−1

$$\xrightarrow{\;}$$
$$\begin{array}{l} s_2 \to s_2 - 2s_1 \\ s_3 \to s_3 - 3s_1 \\ s_4 \to s_4 - 4s_1 \end{array}$$

s_1	s_2	s_3	s_4
1	0	0	0
2	1	−7	−6
−2	1	−6	−5
2	−5	−4	−9

Bestimmung des Rangs einer Matrix

$$\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -12 & -13 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{array} \quad \underset{\begin{array}{c} s_2 \to s_2 - 2s_1 \\ s_3 \to s_3 - 3s_1 \\ s_4 \to s_4 - 4s_1 \end{array}}{\longrightarrow} \quad \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & -6 \\ -2 & 1 & -6 & -5 \\ 2 & -5 & -4 & -9 \end{array} \quad \underset{\begin{array}{c} s_3 \to s_3 + 7s_2 \\ s_4 \to s_4 + 6s_2 \end{array}}{\longrightarrow}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -39 & -39 \end{array}$$

Bestimmung des Rangs einer Matrix

$$
\begin{array}{cccc}
s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 \\
2 & 5 & -1 & 2 \\
-2 & -3 & -12 & -13 \\
2 & -1 & 2 & -1
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\longrightarrow \\
s_2 \to s_2 - 2s_1 \\
s_3 \to s_3 - 3s_1 \\
s_4 \to s_4 - 4s_1
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccc}
s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & -7 & -6 \\
-2 & 1 & -6 & -5 \\
2 & -5 & -4 & -9
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\longrightarrow \\
s_3 \to s_3 + 7s_2 \\
s_4 \to s_4 + 6s_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & 1 & 1 & 1 \\
2 & -5 & -39 & -39
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\longrightarrow \\
s_4 \to s_4 - s_3
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & 1 & 1 & 0 \\
2 & -5 & -39 & 0
\end{array}
$$

Bestimmung des Rangs einer Matrix

$$
\begin{array}{cccc}
s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 \\
2 & 5 & -1 & 2 \\
-2 & -3 & -12 & -13 \\
2 & -1 & 2 & -1
\end{array}
\quad
\underset{\substack{s_2 \to s_2 - 2s_1 \\ s_3 \to s_3 - 3s_1 \\ s_4 \to s_4 - 4s_1}}{\longrightarrow}
\quad
\begin{array}{cccc}
s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & -7 & -6 \\
-2 & 1 & -6 & -5 \\
2 & -5 & -4 & -9
\end{array}
\quad
\underset{\substack{s_3 \to s_3 + 7s_2 \\ s_4 \to s_4 + 6s_2}}{\longrightarrow}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & 1 & 1 & 1 \\
2 & -5 & -39 & -39
\end{array}
\quad
\underset{s_4 \to s_4 - s_3}{\longrightarrow}
\quad
\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & 1 & 1 & 0 \\
2 & -5 & -39 & 0
\end{array}
\quad
\underset{s_1 \to s_1 - 2s_2}{\longrightarrow}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
-4 & 1 & 1 & 0 \\
12 & -5 & -39 & 0
\end{array}
$$

Bestimmung des Rangs einer Matrix

$$\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -12 & -13 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{array} \quad \underset{\substack{s_2 \to s_2 - 2s_1 \\ s_3 \to s_3 - 3s_1 \\ s_4 \to s_4 - 4s_1}}{\longrightarrow} \quad \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & -6 \\ -2 & 1 & -6 & -5 \\ 2 & -5 & -4 & -9 \end{array} \quad \underset{\substack{s_3 \to s_3 + 7s_2 \\ s_4 \to s_4 + 6s_2}}{\longrightarrow}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -39 & -39 \end{array} \quad \underset{s_4 \to s_4 - s_3}{\longrightarrow} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -39 & 0 \end{array} \quad \underset{s_1 \to s_1 - 2s_2}{\longrightarrow}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 0 \\ 12 & -5 & -39 & 0 \end{array} \quad \underset{\substack{s_1 \to s_1 + 4s_3 \\ s_2 \to s_2 - s_3}}{\longrightarrow} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -144 & 34 & -39 & 0 \end{array}$$

Deutung elementarer Umformungen als Matrizenmultiplikation

Zeilen

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&4\end{pmatrix}$$

$z_2 \to z_2 - 2z_1, \quad z_3 \to 3z_3$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\9&12&12\end{pmatrix}$$

Deutung elementarer Umformungen als Matrizenmultiplikation

<u>Spalten</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$s_2 \to s_2 - 2s_1, \quad s_3 \to s_3 - 3s_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Invertieren einer Matrix

$$
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}
\quad \xrightarrow[\;]{\substack{s_2 \to s_2 - 2s_1 \\ s_3 \to s_3 - 3s_1}} \quad
\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \\ \hline 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}
\quad \xrightarrow{s_3 \to s_3 - 2s_2} \quad
\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}
$$

$$
\xrightarrow{s_3 \to -s_3} \quad
\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}
\quad \xrightarrow{\substack{s_2 \to s_2 + 2s_3 \\ s_1 \to s_1 - 3s_3 \\ s_2 \to -s_2}} \quad
\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 4 & -1 \\ -6 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}
\quad \xrightarrow{s_1 \to s_1 - 2s_2} \quad
\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -4 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}
$$