

DIPLOMARBEIT

Funktionale Grenzwertsätze in der Kombinatorik

Ausgeführt am Institut für
Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Bernhard Gittenberger

durch

Martin Zeiner
Hasenhutg. 7/5/3
1120 Wien

19.3.2007

Einleitung

Betrachten wir folgendes Beispiel: Sei S_n die Menge der Permutationen auf der Menge $\{1, \dots, n\}$, versehen mit der Gleichverteilung. $X_{ns} = X_{ns}(\sigma)$ sei die Anzahl der Zyklen der Länge s in einer zufälligen Permutation $\sigma \in S_n$. Mit

$$X_n(t) = \sum_{1 \leq s \leq n^t} X_{ns}, \quad t \in [0, 1],$$

bezeichnen wir die Anzahl aller Zyklen der Länge kleiner oder gleich n^t . Für festes σ ist $X_n(t)$ eine Stufenfunktion. Skaliert man noch geeignet, so kann man das Verhalten für n gegen unendlich untersuchen. Dabei stellt sich heraus, dass dieser Prozess in $D[0, 1]$ schwach gegen einen speziellen Gauß'schen Prozess, die Brown'sche Bewegung, konvergiert ([13]).

In dieser Arbeit setzen wir uns mit Methoden, mit denen derartige Grenzwertsätze, welche funktionale Grenzwertsätze genannt werden, gezeigt werden können, und mit deren Anwendungen in der Kombinatorik auseinander.

In Kapitel 1 geben wir die Definition stochastischer Prozesse und wichtige Eigenschaften an und stellen die behandelten Prozesse, insbesondere die Brown'sche Bewegung und davon abgeleitete Prozesse, vor. Da die betrachteten Prozesse ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf den Räumen $C[0, 1]$, $C[0, \infty)$ oder $D[0, 1]$ induzieren, untersuchen wir die Konvergenz von Maßen speziell in diesen Räumen.

In Kapitel 2 werden Methoden vorgestellt, mit denen funktionale Grenzwertsätze gezeigt werden können: Wir betrachten erzeugende Funktionen diskreter Zufallsvariablen und kombinatorischer Strukturen, die Sattelpunktmethode und Singularitätsanalyse zur Bestimmung derer Koeffizienten sowie die Poissonapproximation, um Abhängigkeiten von Zufallsvariablen, die aus dem kombinatorischen Setup entstehen, zu vermeiden.

In Kapitel 3 wird gezeigt, wo stochastische Prozesse in der Kombinatorik auftreten, und wie funktionale Grenzwertsätze mit den vorgestellten Methoden bewiesen werden können. Zu den Beispielen zählen zufällige Bäume, Abbildungen einer n -elementigen Menge auf sich selbst, Partitionen einer Menge, Permutationen, Matrizen und Urnenmodelle.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	i
1 Stochastische Prozesse	1
1.1 Stochastische Prozesse	1
1.1.1 Definition und spezielle Prozesse	1
1.2 Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen	5
1.2.1 Konvergenz	5
1.2.2 Funktionale Grenzwertsätze	9
1.2.3 Schwache Konvergenz in $C[0, 1]$	10
1.2.4 Schwache Konvergenz in $C[0, \infty)$	12
1.2.5 Schwache Konvergenz in $D[0, 1]$	12
2 Diskrete, analytische und probabilistische Methoden	14
2.1 Erzeugende Funktionen	14
2.1.1 Erzeugende Funktionen diskreter Zufallsvariablen	14
2.1.2 Erzeugende Funktionen kombinatorischer Strukturen	15
2.2 Berechnung der Koeffizienten erzeugender Funktionen	19
2.2.1 Die Sattelpunktmethode	19
2.2.2 Singularitätsanalyse	24
2.3 Poissonapproximation	28
3 Anwendungen in der Kombinatorik	33
3.1 Zufällige Bäume	33
3.1.1 Zufällige Bäume und Verzweigungsprozesse	34
3.1.2 Profil	35
3.1.3 Kontur	41
3.1.4 Traversierung	43
3.2 Zufallsabbildungen	44
3.2.1 Zusammenhangskomponenten	45
3.2.2 Strata	51
3.2.3 Kontur	52
3.3 Zufällige Partitionen einer Menge	52
3.4 Zufällige Permutationen	60
3.5 Zufällige Matrizen	63
3.6 Urnenmodelle	66

Kapitel 1

Stochastische Prozesse

1.1 Stochastische Prozesse

1.1.1 Definition und spezielle Prozesse

In diesem Abschnitt soll ein kurzer Überblick über stochastische Prozesse und in diesem Zusammenhang betrachtete Größen gegeben werden. Weiters werden die in dieser Arbeit betrachteten speziellen Prozesse definiert. Grundlegende Kenntnisse aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie werden dabei vorausgesetzt (siehe dazu Bauer [8], Sachkov [36], Gihman und Skorohod [24]). Eine ausführliche Theorie über stochastische Prozesse findet sich in Gihman und Skorohod [24]; für die Brown'sche Bewegung siehe Borodin und Salminen [11] und Revuz und Yor [35], aber auch Billingsley [10].

Zunächst wenden wir uns der Definition stochastischer Prozesse zu:

Definition 1.1.1 Eine messbare Abbildung X von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{G}, \mathbf{P})$ in einen messbaren Raum (E, \mathcal{E}) nennen wir ein *Zufallselement*.

Definition 1.1.2 Sei $(\Omega, \mathfrak{G}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, (E, \mathcal{E}) ein messbarer Raum, I eine beliebige Indexmenge. Eine Familie $X = (X_t)_{t \in I}$ von Zufallselementen $X_t : \Omega \rightarrow E$ heißt *stochastischer Prozess* mit Zustandsraum (E, \mathcal{E}) .

Ist I ein Intervall in \mathbb{R} , so spricht man von einem kontinuierlichen Prozess. Der Parameter t wird oft auch als Zeit bezeichnet.

Wir werden uns im folgenden auf $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ beschränken. Dabei bezeichnet $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ den Raum der reellen Zahl versehen mit der σ -Algebra der Borelmengen.

Stochastische Prozesse werden oft durch ihre endlichdimensionalen Verteilungen beschrieben:

Definition 1.1.3 Die Verteilungen $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, $n \geq 1$, $t_1, \dots, t_n \in I$, heißen *endlichdimensionale Verteilungen* des Prozesses X .

Bemerkung 1.1.1 Im Allgemeinen reichen die endlichdimensionalen Verteilungen nicht aus, um einen Prozess eindeutig festzulegen. Fordert man aber weitere Eigenschaften des Prozesses, so kann man auch wieder die Eindeutigkeit erreichen.

Für festes $\omega \in \Omega$ können wir einen Prozess auch als Funktion von t auffassen:

Definition 1.1.4 Sei $\omega \in \Omega$ fest. Die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ heißt *Trajektorie* oder *Pfad* des Prozesses X .

X heißt *fast sicher stetig* oder hat *f.s. stetige Pfade*, falls es eine Menge $N \in \mathfrak{G}$ mit $\mathbf{P}(N) = 0$ gibt, sodass die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ stetig für alle $\omega \in \Omega \setminus N$ ist.

Analog wird *f.s. rechts stetig mit linksseitigen Grenzwerten* definiert.

Wir werden in dieser Arbeit nur Prozesse mit Pfaden in $C[0, 1], C[0, \infty)$ bzw. $D[0, 1]$ betrachten. Da solch ein Prozess ein Maß auf diesen Räumen induziert, können wir diese Prozesse auch als Zufallselemente mit Werten in diesen Räumen auffassen, was wir auch tun werden. Die endlichdimensionalen Verteilungen sind dann $X\pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}$, wobei π_{t_1, \dots, t_k} die Abbildung $(x(t))_{t \in I} \mapsto (x(t_1), \dots, x(t_k))$ ist.

Ein wichtiges Kriterium für die Stetigkeit eines Prozesses liefert das Kriterium von Kolmogorov (für einen Beweis siehe [35]). Dazu zunächst

Definition 1.1.5 Zwei stochastische Prozesse heißen *Modifikationen* voneinander, falls $\mathbf{P}(X_t = Y_t) = 1$ für alle $t \in I$ gilt.

Satz 1.1.1 (Kriterium von Kolmogorov) Sei X_t ein stochastischer Prozess. Existieren Konstanten $\alpha, \beta, C > 0$, sodass

$$\mathbf{E}|X_t - X_s|^\alpha \leq C|t - s|^{1+\beta}$$

für alle s, t gilt, dann hat X eine f.s. stetige Modifikation.

Bemerkung 1.1.2 Die Pfade von Modifikationen eines Prozesses können sehr unterschiedliche Eigenschaften haben. Sei $X_t \equiv 0$ für $t \in [0, 1]$. Sei τ gleichverteilt in $[0, 1]$ und der Prozess Y_t sei definiert durch

$$Y_t = \begin{cases} 1 & \text{falls } \tau = t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wegen $\mathbf{P}(X_t = Y_t) = \mathbf{P}(t \neq \tau) = 1$ sind X_t und Y_t Modifikationen voneinander, wobei die Pfade von X_t stetig sind, die von Y_t aber nicht. Definieren wir

$$Y_t = \begin{cases} n & \text{falls } \exists n : \tau/n = t, \tau \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

so ist Y_t noch immer eine Modifikation von X_t , die Pfade sind aber f.s. unstetig und unbeschränkt.

Definition 1.1.6 Ein stochastischer Prozess heißt *Markov-Prozess*, falls für $s_1 < \dots < s_n < s < t$

$$\mathbf{P}(X_t \in B | X_{s_1}, \dots, X_{s_n}, X_s) = \mathbf{P}(X_t \in B | X_s), \quad (1.1)$$

und es eine Funktion $\mathbb{P}(s, y, t, B)$ gibt, die Borel-messbar in Bezug auf y für feste s, t, B ist, und für feste s, y, t ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathfrak{B} ist, welches die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung*

$$\mathbb{P}(t_1, y, t_3, B) = \int \mathbb{P}(t_2, y_2, t_3, B) \mathbb{P}(t_1, y, t_2, dy_2)$$

erfüllt und mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\mathbb{P}(s, X(s), t, B) = \mathbf{P}(X(t) \in B | X(s))$$

gilt.

Die Eigenschaft (1.1) heißt *Markov-Eigenschaft*, die Funktionen $\mathbb{P}(s, y, t, B)$ werden *Übergangswahrscheinlichkeiten* genannt.

Eine wichtige Größe eines stochastischen Prozesses X ist die Belegungszeit

$$B(A) = \int_I \mathbf{1}_A(X(t)) dt,$$

dh. die Zeit, die der Prozess auf der Menge A verbringt. Will man aber die Zeit in der Nähe eines Punktes t messen, so reicht diese Definition nicht aus, da $\mathbf{1}_t(X(t))$ im Allgemeinen eine Nullmenge ist. Dies führt zu

Definition 1.1.7 Den Grenzwert

$$l(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_I \mathbf{1}_{[t, t+\epsilon]}(X(s)) ds$$

bezeichnet man als *lokale Zeit* des Prozesses X bei t .

Wenden wir uns nun speziellen Prozessen zu:

Definition 1.1.8 Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in I}$ heißt *Gauß'scher Prozess*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}, \forall t_k \in I, k = 1 \dots n$ die Folge $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ einer k -dimensionalen Normalverteilung genügt.

Die Existenz Gauß'scher Prozesse bei vorgegebener Kovarianzfunktion liefert der folgende Satz (siehe [35], S.35):

Satz 1.1.2 *Die Kovarianz eines Gauß'schen Prozesses ist eine positiv semidefinite Funktion. Umgekehrt ist jede positiv semidefinite Funktion die Kovarianz eines zentrierten Gauß'schen Prozesses.*

Definition 1.1.9 Eine 1-dimensionale *Standard-Brown'sche Bewegung* mit Startpunkt x auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{G}, \mathbf{P})$ ist ein stochastischer Prozess $W, t \geq 0$, mit

- (i) $W_0 = x$ fast sicher,
- (ii) W ist f.s. stetig,
- (iii) für alle $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ sind die Zuwächse

$$W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}}, \dots, W_{t_1} - W_{t_0}$$

unabhängig und normalverteilt mit

$$\mathbf{E}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{E}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = t_i - t_{i-1}.$$

Bemerkung 1.1.3 Die Brown'sche Bewegung ist ein Markov-Prozess.

Wir setzen im folgenden stets $x = 0$ voraus. Durch die obige Definition sind die Verteilungen X_t zu jedem Zeitpunkt t bereits gegeben: Sie sind normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Kovarianzfunktion $\Sigma(s, t) = \min(s, t)$ (siehe [7]). Weiters ist in diesem Fall die Forderung (ii) der Definition redundant.

Die Bedeutung der Brown'schen Bewegung liegt in folgendem Satz, der ein Analogon zum zentralen Grenzwertsatz für die Normalverteilung darstellt (für einen Beweis siehe [10]):

Satz 1.1.3 (Satz von Donsker) Seien ξ_n , $n \in \mathbb{N}$, unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Mittelwert 0 und endlicher, positiver Varianz σ^2 . Sei S_n die Partialsumme

$$S_n = \sum_{i=0}^n \xi_i.$$

Dann gilt für den durch

$$X_n(t) := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]} \quad 0 \leq t \leq 1$$

definierten Prozess

$$X_n \xrightarrow{w} W$$

in $D[0, 1]$.

Bemerkung 1.1.4 Der Satz von Donsker gilt auch für $C[0, 1]$, wenn man X_n durch Interpolation definiert:

$$X_n(t) := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]} + (nt - [nt]) \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \xi_{[nt]+1}$$

Definition 1.1.10 Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $l > 0$ fest gewählt. Ein stetiger Gauß'scher Prozess B mit $I = [0, l]$, $B_0 = x$ und

$$\mathbf{E}B_t = x + (y - x) \frac{t}{l}, \quad \mathbf{Cov}(B_t, B_s) = \min(s, t) - \frac{st}{l}$$

heißt eine *Brown'sche Brücke von x nach y der Länge l* . Wir schreiben $B^{x,l,y}$.

Bemerkung 1.1.5 Es gilt $\mathbf{E}B_l = y$ und $\mathbf{Cov}(B_t, B_s) = 0$, falls $s = l$ oder $t = l$, und daher $B_l = y$ f.s. Aufgrund dieser Eigenschaft heißt B *Brown'sche Brücke*. Die Brown'sche Brücke $B^{0,1,0}$ können wir auch durch $W_t - tW_1$, $t \in [0, 1]$ beschreiben.

Definition 1.1.11 Sei $t > 0$. Wir definieren die Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} \tau_1(t) &= \sup\{s : s \leq t, W(s) = 0\} \\ \tau_2(t) &= \inf\{s : s \geq t, W(s) = 0\}. \end{aligned}$$

Der auf diesem Intervall $[\tau_1(t), \tau_2(t)]$ definierte Prozess $W(s)$ heißt *Brown'sche Exkursion*. Dabei ist $\tau_2(t) - \tau_1(t)$ die *Länge* der Exkursion.

Mit $W^+(s)$, $s \in [0, 1]$ bezeichnen wir die skalierte Exkursion

$$W^+(s) = \frac{|W(\tau_1(t) + s(\tau_2 - \tau_1))|}{\sqrt{\tau_2(t) - \tau_1(t)}}.$$

Bemerkung 1.1.6 Die Brown'sche Exkursion ist ein Markov-Prozess.

1.2 Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen

In diesem Abschnitt stellen wir die für diese Arbeit relevanten Arten der Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen vor und leiten Kriterien für die Konvergenz speziell für die Räume $C[0, 1]$, $C[0, \infty)$ und $D[0, 1]$ her, siehe dazu Billingsley [10], Gihman und Skorohod [24] und Feller [19].

1.2.1 Konvergenz

Definition 1.2.1 Sei S ein metrischer Raum, \mathfrak{B} die Sigma-Algebra der Borelmengen auf S und \mathbf{P}_n , $n \in \mathbb{N}$, und \mathbf{P} Wahrscheinlichkeitsmaße auf (S, \mathfrak{B}) . Erfüllt die Folge \mathbf{P}_n

$$\int_S f d\mathbf{P}_n \rightarrow \int_S f d\mathbf{P}$$

für alle beschränkten, stetigen und reellwertigen Funktionen f , so heißt sie *schwach konvergent* gegen \mathbf{P} . Wir schreiben $\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$.

Satz 1.2.1 ([10]) Seien \mathbf{P}_n, \mathbf{P} Wahrscheinlichkeitsmaße auf (S, \mathfrak{B}) . Dann sind äquivalent:

- (i) $\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$,
- (ii) $\lim \int f d\mathbf{P}_n = \int f d\mathbf{P}$ für alle beschränkten, gleichmäßig stetigen reellwertigen f ,
- (iii) $\limsup \mathbf{P}_n(F) \leq \mathbf{P}(F)$ für alle abgeschlossenen Mengen F ,
- (iv) $\liminf \mathbf{P}_n(G) \geq \mathbf{P}(G)$ für alle offenen Mengen G ,
- (v) $\lim \mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(A)$ für alle $A \in \mathfrak{B}$ mit $\mathbf{P}(\partial A) = 0$.

Definition 1.2.2 Sei X ein Zufallselement von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{G}, \mathbf{P})$ in einen metrischen Raum S mit Metrik ρ . Ist $S = \mathbb{R}$, so nennen wir X eine *stochastische Größe* oder *Zufallsvariable* und im Fall $S = \mathbb{R}^k$ einen *stochastischen Vektor* (da eine Zufallsvariable auch ein stochastischer Vektor ist, werden wir im weiteren oft von stochastischen Vektoren sprechen). In den Fällen $S = C[0, 1]$, $S = C[0, \infty)$, $S = D[0, 1]$ bezeichnen wir X als *Zufallsfunktion*.

\mathbf{P} induziert bekanntlich ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}X^{-1}$ auf (S, \mathfrak{B}) durch

$$\hat{\mathbf{P}}(B) = \mathbf{P}(X^{-1}B) = \mathbf{P}\{\omega : X(\omega) \in B\} = \mathbf{P}\{X \in B\}, \quad B \in \mathfrak{B}.$$

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\hat{\mathbf{P}}$ heißt die *Verteilung von X* . Damit können wir nun die Konvergenz von Zufallselementen definieren:

Definition 1.2.3 Eine Folge (X_n) von Zufallselementen *konvergiert in Verteilung* gegen ein Zufallselement X , i.Z.

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X,$$

falls die zugehörigen Verteilungen \mathbf{P}_n schwach gegen \mathbf{P} konvergieren.

Oft ist es schwer die schwache Konvergenz einer Folge (\mathbf{P}_n) gegen \mathbf{P} zu zeigen, stattdessen ist es aber deutlich leichter, die Konvergenz einer Folge (\mathbf{Q}_n) gegen \mathbf{P} zu zeigen, die der Folge (\mathbf{P}_n) „sehr ähnlich“ ist. Dann würden wir gerne auf die Konvergenz von (\mathbf{P}_n) schließen. Dazu zunächst

Definition 1.2.4 Gilt für ein Element $a \in S$

$$\mathbf{P}(\rho(X_n, a) \geq \epsilon) \rightarrow 0$$

für alle $\epsilon > 0$, dann *konvergiert* X_n in *Wahrscheinlichkeit gegen* a , i.Z.

$$X_n \xrightarrow{P} a.$$

Satz 1.2.2 ([10]) Sei S separabel und X_n und Y_n haben denselben Definitionsbereich. Gelten $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ und $\rho(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} 0$, dann folgt $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

Beweis: Da S separabel ist, ist $\rho(X_n, Y_n)$ eine stochastische Größe (siehe [10], p.225). Ist $F_\epsilon = \{x : \rho(x, F) \leq \epsilon\}$ mit $F \subseteq S$, dann gilt

$$\mathbf{P}(Y_n \in F) \leq \mathbf{P}(\rho(X_n, Y_n) \geq \epsilon) + \mathbf{P}(X_n \in F_\epsilon).$$

Da F_ϵ abgeschlossen ist, folgt mit der Annahme und Satz 1.2.1 (entsprechend für Konvergenz in Verteilung)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y_n \in F) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n \in F_\epsilon) \leq \mathbf{P}(X \in F_\epsilon).$$

Ist F abgeschlossen, dann $F_\epsilon \rightarrow F$ für $\epsilon \rightarrow 0$ (also $\bigcap_{\epsilon > 0} F_\epsilon = F$) und mit Satz 1.2.1 folgt die Behauptung. ☞

Ein wichtiges Merkmal einer stochastischen Größe ist seine momentenerzeugende Funktion ([26],[36]):

Definition 1.2.5 Existiert für eine Zufallsvariable X und ein $h > 0$ der Erwartungswert von e^{tX} für $-h < t < h$, so nennt man diesen die *momentenerzeugende Funktion von* X :

$$M(t) = \mathbf{E}(e^{tX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{tX} d\mathbf{P}(x), \quad -h < t < h.$$

Bemerkung 1.2.1 Der Name dieser Funktion beruht auf der Tatsache

$$\frac{d^k}{dt^k} M(t) \Big|_{t=0} = \mathbf{E}(X^k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Beispiel 1.2.1 Sei $X \sim N(a, \sigma^2)$ eine normalverteilte Zufallsgröße. Dann ist

$$M(t) = \exp\left(at + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Die Bedeutung der momentenerzeugenden Funktion liegt darin, dass sie die Maße eindeutig bestimmt:

Satz 1.2.3 ([26]) Seien $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und $M_1(t)$ und $M_2(t)$ die dazugehörigen momenterzeugenden Funktionen. Gilt $M_1(t) = M_2(t)$ für alle $t \in (-h, h)$, dann ist $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$.

Daher läßt sich die Konvergenz von stochastischen Vektoren auf die Konvergenz der entsprechenden charakteristischen Funktionen zurückführen:

Satz 1.2.4 (Lévy & Cramér, [26]) Sei (X_n) eine Folge von Zufallsvariablen, deren momenterzeugende Funktionen $M_n(t)$ für alle n für $-h < t < h$ ($h > 0$) existieren. X sei eine Zufallsvariable mit momenterzeugender Funktion $M(t)$, die für $|t| < h_1 \leq h$ ($h_1 > 0$) existiert. Dann gilt

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \quad \text{wenn} \quad M_n(t) \rightarrow M(t) \quad \forall t \in (-h_1, h_1).$$

Die momenterzeugende Funktion existiert aber nicht für alle stochastischen Größen. Dies führt zu

Definition 1.2.6 Die Funktion $J(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$,

$$J(\mathbf{u}) = \mathbf{E}e^{i(\mathbf{u}, \mathbf{X})} = \int_{\mathbb{R}^m} e^{i(\mathbf{u}, \mathbf{x})} d\mathbf{P}(\mathbf{x}),$$

heißt *charakteristische Funktion* des stochastischen Vektors \mathbf{X} (oder der entsprechenden Verteilung \mathbf{P}). Dabei bezeichnet (\mathbf{u}, \mathbf{x}) das innere Produkt der Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{x} .

Bemerkung 1.2.2 Die charakteristische Funktion existiert für alle stochastischen Vektoren.

Beispiel 1.2.2 Sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ ein normalverteilter stochastischer Vektor. Dann ist

$$J(\mathbf{u}) = \exp \left(i \sum_{j=1}^k a_j u_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \sigma_{ij} u_i u_j \right)$$

mit

$$a_j = \mathbf{E}X_j, \quad \sigma_{ij} = \mathbf{E}(X_i - a_i)(X_j - a_j).$$

Wie die momenterzeugende Funktion bestimmt auch die charakteristische Funktion die Maße eindeutig:

Satz 1.2.5 ([10]) Seien $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^k, \mathfrak{B}^k)$ und $J_1(\mathbf{u})$ und $J_2(\mathbf{u})$ die dazugehörigen charakteristischen Funktionen. Dann folgt: Gilt $J_1(\mathbf{u}) = J_2(\mathbf{u})$ für alle \mathbf{u} , dann ist $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$.

Daher läßt sich die Konvergenz von stochastischen Vektoren auf die Konvergenz der entsprechenden charakteristischen Funktionen zurückführen:

Satz 1.2.6 ([10]) Seien \mathbf{P}_n, \mathbf{P} Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^k, \mathfrak{B}^k)$ und $J_n(\mathbf{u})$ und $J(\mathbf{u})$ die dazugehörigen charakteristischen Funktionen. Dann gilt

$$\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P} \quad \text{genau dann, wenn} \quad J_n(\mathbf{u}) \rightarrow J(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^k.$$

Man kann die Konvergenz von stochastischen Größen auch auf die Konvergenz der Momente zurückführen. Da jedoch die Momente die Verteilung im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmen, gilt

Satz 1.2.7 ([19]) *Seien X_n und X Zufallsvariablen, deren Erwartungswerte $\mathbf{E}(X_n^k)$ und $\mathbf{E}(X^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existieren. Weiters sei X durch ihre Momente eindeutig bestimmt. Dann gilt*

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X, \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathbf{E}(X_n^k) \rightarrow \mathbf{E}(X^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung 1.2.3 Die Normalverteilung ist durch ihre Momente bestimmt.

Einer Überlegung von Cramér und Wold zufolge kann das Problem der Konvergenz eines stochastischen Vektors auf die Konvergenz einer Zufallsvariablen zurückgeführt werden: Seien

$$\mathbf{X}_n = (X_{n1}, \dots, X_{nk}) \quad \text{und} \quad \mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$$

stochastische Vektoren und es gelte

$$\sum_{i=1}^k t_i X_{ni} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^k t_i X_i$$

für alle $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k$. Dann konvergieren die charakteristischen Funktionen

$$J_n(u) = \mathbf{E}\left(\exp\left(iu \sum_{i=1}^k t_i X_{ni}\right)\right)$$

der eindimensionalen Zufallsvariablen gegen

$$J(u) = \mathbf{E}\left(\exp\left(iu \sum_{i=1}^k t_i X_i\right)\right)$$

für alle $u \in \mathbb{R}$. Setzen wir $u = 1$, so folgt

$$\mathbf{E}\left(e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{X}_n)}\right) \rightarrow \mathbf{E}\left(e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{X})}\right).$$

Dies gilt für alle \mathbf{t} , also folgt $\mathbf{X}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbf{X}$. Daher gilt

Satz 1.2.8 ([10]) *Im \mathbb{R}^k konvergieren die stochastischen Vektoren \mathbf{X}_n genau dann in Verteilung gegen \mathbf{X} , wenn jede Linearkombination aus Komponenten von \mathbf{X}_n gegen die entsprechende Linearkombination aus Komponenten von \mathbf{X} in Verteilung konvergiert.*

Eine andere Möglichkeit, die schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen im \mathbb{R}^k zu zeigen, führt über die Dichtefunktionen und ist eine Folgerung aus dem Satz von Scheffé:

Satz 1.2.9 ([10]) *Seien \mathbf{P}_n, \mathbf{P} Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R}^k mit Dichten f_n und f . Gilt*

$$f_n(x) \rightarrow f(x)$$

für alle x mit Ausnahme einer Lebesgue-Nullmenge, so folgt

$$\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P}.$$

1.2.2 Funktionale Grenzwertsätze

Zunächst wollen wir uns der Frage zuwenden, wie sich die schwache Konvergenz unter Abbildungen verhält. Sei $h : S \rightarrow S'$ messbar und sei D_h die Menge der Unstetigkeitsstellen von h . Dann ist $D_h \in \mathfrak{B}$.

Satz 1.2.10 ([10]) *Gelten $\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$ und $\mathbf{P}(D_h) = 0$, dann folgt $\mathbf{P}_n h^{-1} \xrightarrow{w} \mathbf{P} h^{-1}$.*

Beweis: Sei $F \subseteq S'$ abgeschlossen. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(h^{-1}F) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(\overline{(h^{-1}F)}) \leq \mathbf{P}(\overline{(h^{-1}F)}).$$

Wegen $\mathbf{P}(D_h) = 0$ und $\overline{h^{-1}F} \subseteq D_h \cup h^{-1}F$ folgt $\mathbf{P}(\overline{h^{-1}F}) = \mathbf{P}(h^{-1}F)$ und daher gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(h^{-1}F) \leq \mathbf{P}(h^{-1}F).$$

Mit Satz 1.2.1 folgt nun die Behauptung. ☞

Für $S' = \mathbb{R}$ erhalten wir daraus

Satz 1.2.11 ([10]) *Gilt $\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$, und ist h eine reellwertige, beschränkte, messbare Funktion mit $\mathbf{P}(D_h) = 0$, dann gilt auch $\int h d\mathbf{P}_n \rightarrow \int h d\mathbf{P}$.*

Beweis: Nach dem vorigen Satz gilt $\mathbf{P}_n h^{-1} \xrightarrow{w} \mathbf{P} h^{-1}$. Durch Variablensubstitution erhalten wir $\int f(h(x)) \mathbf{P}_n(dx) \rightarrow \int f(h(x)) \mathbf{P}(dx)$ für jede beschränkte, stetige Funktion auf \mathbb{R} . Ist h durch M beschränkt, so folgt mit $f(t) = \mathbf{1}_{[-M, M]}(t) \cdot t$ die Behauptung. ☞

Sei (X_n) nun eine Folge von Zufallsfunktionen und \mathbf{P}_n die entsprechenden Maße. Konvergiert \mathbf{P}_n schwach gegen \mathbf{P} , so gilt für jedes messbare, beschränkte, \mathbf{P} -fast überall stetige Funktional $h(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int h d\mathbf{P}_n = \int h d\mathbf{P}$$

und daher für jedes messbare f.ü. stetige Funktional $f(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int e^{iuf(x)} d\mathbf{P}_n = \int e^{iuf(x)} d\mathbf{P}$$

für alle $u \in \mathbb{R}$. Nun ist aber

$$\int e^{iuf(x)} d\mathbf{P}_n = \mathbf{E} e^{iuf(X_n)} \quad \text{und} \quad \int e^{iuf(x)} d\mathbf{P} = \mathbf{E} e^{iuf(X)}.$$

Dies sind die charakteristischen Funktionen der Zufallsvariablen $f(X_n)$ und $f(X)$. Die Konvergenz der Maße \mathbf{P}_n gegen \mathbf{P} impliziert also die Konvergenz von $f(X_n)$ gegen $f(X)$ für jede messbare, \mathbf{P} -f.ü. stetige, reellwertige Funktion f .

Konvergiert nun umgekehrt $f(X_n)$ gegen $f(X)$ für jede messbare, \mathbf{P} -f.ü. stetige, reellwertige Funktion f , dann gilt auch $\mathbf{E} h(X_n) \rightarrow \mathbf{E} h(X)$ für jedes messbare, beschränkte, \mathbf{P} -f.ü. stetige Funktional h , also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int h d\mathbf{P}_n = \int h d\mathbf{P}.$$

Daher ist die Konvergenz der Maße \mathbf{P}_n gegen \mathbf{P} äquivalent zur Konvergenz der Zufallsvariablen von $f(X_n)$ gegen $f(X)$ für jedes messbare, \mathbf{P} -f.ü. stetige Funktional (siehe [24]). Daher nennt man Grenzwertsätze der Gestalt $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ für Zufallsfunktionen X_n, X funktionale Grenzwertsätze.

1.2.3 Schwache Konvergenz in $C[0, 1]$

Um die schwache Konvergenz in $C = C[0, 1]$ zu zeigen, benötigen wir für die Praxis relevante Kriterien. Aufgrund der Stetigkeit der Projektionen π_{t_1, \dots, t_k} folgt aus $\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$ auch $\mathbf{P}_n \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1} \xrightarrow{w} \mathbf{P} \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}$. In C ist zwar ein Maß durch seine endlichdimensionalen Verteilungen eindeutig bestimmt, die Umkehrung der obigen Folgerung ist jedoch nicht richtig, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

Sei \mathbf{P} die Einheitsmasse bei der Nullfunktion und \mathbf{P}_n Einheitsmassen bei der Funktion

$$x_n(t) = \begin{cases} nt & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nt & \text{falls } \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{falls } \frac{2}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

und X_n gemäß \mathbf{P}_n verteilte Zufallsfunktionen. Dann konvergieren die endlichdimensionalen Verteilungen von X_n gegen jene von X : Sei $A = \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}(a_1, \dots, a_k)$. Ist $2/n$ kleiner als alle t_i , für die $a_i \neq 0$ ist, so ist $\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(A) = 0$, sind alle $a_i = 0$, $\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(A) = 1$. Ist aber hingegen $A = K(0, \frac{1}{2})$, so ist $\mathbf{P}_n(A) = 0$ und $\mathbf{P}(A) = 1$. Also konvergiert X_n nicht gegen X , obwohl die endlichdimensionalen Verteilungen konvergieren.

Man kann aber leicht zeigen (der Beweis verläuft analog zum entsprechenden Satz für Folgen reeller Zahlen), dass \mathbf{P}_n genau dann schwach gegen \mathbf{P} konvergiert, falls jede Teilfolge eine gegen \mathbf{P} schwach konvergente Teilfolge besitzt. Das führt zu

Definition 1.2.7 Eine Familie F von Maßen heißt *relativ kompakt*, falls jede Teilfolge aus F eine schwach konvergente Teilfolge besitzt.

Damit haben wir

Satz 1.2.12 Die Folge \mathbf{P}_n konvergiert genau dann schwach gegen \mathbf{P} , falls die endlichdimensionalen Verteilungen von \mathbf{P}_n gegen die endlichdimensionalen Verteilungen von \mathbf{P} konvergieren und die Folge (\mathbf{P}_n) relativ kompakt ist.

Beweis: Jede Teilfolge $(\mathbf{P}_{n'})$ von (\mathbf{P}_n) enthält eine Teilfolge $(\mathbf{P}_{n''})$, die gegen eine Verteilung \mathbf{Q} konvergiert. Da die endlichdimensionalen Verteilungen gegen \mathbf{P} konvergieren, muss $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ gelten. Damit enthält aber jede Teilfolge von (\mathbf{P}_n) eine gegen \mathbf{P} konvergente Teilfolge und daher konvergiert (\mathbf{P}_n) schwach gegen \mathbf{P} . ◻

Die relative Kompaktheit ist meist sehr schwierig nachzuweisen. Wir definieren zunächst

Definition 1.2.8 Eine Familie F von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem metrischen Raum heißt *straff*, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine kompakte Menge K gibt, sodass $\mathbf{P}(K) > 1 - \epsilon$ für alle $\mathbf{P} \in F$ gilt.

Satz 1.2.13 (Satz von Prohorov, [10]) Sei S ein metrischer Raum.

- (i) Ist eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen straff, so ist sie relativ kompakt.
- (ii) Sei S separabel und vollständig. Ist eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen relativ kompakt, so ist sie auch straff.

Folgerung 1.2.1 Da C mit der Metrik $d(x, y) = \sup\{|x(t) - y(t)| : t \in [0, 1]\}$ einen vollständigen separablen Raum bildet, konvergiert die Folge (\mathbf{P}_n) genau dann schwach gegen \mathbf{P} , falls die endlichdimensionalen Verteilungen von \mathbf{P}_n gegen die endlichdimensionalen Verteilungen von \mathbf{P} konvergieren und die Folge (\mathbf{P}_n) straff ist.

Ein Kriterium für die Straffheit einer Folge (X_n) in C liefert der folgende Satz:

Satz 1.2.14 ([10]) *Die Folge (X_n) ist straff, falls gilt:*

(i) *Die Folge $(X_n(0))$ ist straff.*

(ii) *Es gibt Konstanten $\gamma \geq 0$ und $\alpha > 1$ und eine nichtfallende, stetige Funktion F auf $[0, 1]$ mit*

$$\mathbf{P}(|X_n(t_2) - X_n(t_1)| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^\gamma} |F(t_2) - F(t_1)|^\alpha$$

für alle $t_1, t_2 \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda > 0$.

Die Bedingung (ii) wird von

$$\mathbf{E}(|X_n(t_2) - X_n(t_1)|^\gamma) \leq |F(t_2) - F(t_1)|^\alpha$$

impliziert.

Für Prozesse spezieller Bauart lässt die das Straffheitskriterium vereinfachen (siehe Gittenberger [23]):

Satz 1.2.15 *Sei $S_n(k)$, $n \in \mathbb{N}$, ein auf der Menge $\{1, \dots, n\}$ definierter, diskreter stochastischer Prozess, und der Prozess $X_n(t)$, $t \in [0, 1]$ sei gegeben durch*

$$X_n(t) = \frac{1 - (t - j)}{\sqrt{n}} S(j) + \frac{t - j}{\sqrt{n}} S(j + 1), \quad \text{für } \frac{j}{n} \leq t < \frac{j + 1}{n}.$$

Dann ist (X_n) straff, wenn $(X_n(0))$ straff ist und Konstanten $C > 0, \gamma \geq \alpha > 1$ existieren, sodass

$$\mathbf{P}\left(\left|X_n\left(\frac{i}{n}\right) - X_n\left(\frac{j}{n}\right)\right| \geq \lambda\right) \leq C \frac{1}{\lambda^\gamma} \left|\frac{i - j}{n}\right|^\alpha$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ und alle $\lambda > 0$.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass die Ungleichung aus Satz 1.2.14 für alle $t_1, t_2 \in [0, 1]$ erfüllt ist. Dazu seien zunächst $t_1, t_2 \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$. Wegen der Linearität von X_n auf diesem Intervall folgt

$$|X_n(t_1) - X_n(t_2)| = \frac{|t_1 - t_2|}{1/n} \left|X_n\left(\frac{i}{n}\right) - X_n\left(\frac{i+1}{n}\right)\right|.$$

Daher gilt unter Berücksichtigung der Voraussetzungen und $|t_1 - t_2| < 1/n$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X_n(t_1) - X_n(t_2)| \geq \lambda) &= \mathbf{P}\left(\left|X_n\left(\frac{i}{n}\right) - X_n\left(\frac{i+1}{n}\right)\right| \geq \frac{\lambda}{n|t_1 - t_2|}\right) \\ &\leq C \frac{n^{\gamma-\alpha} |t_1 - t_2|^{\gamma-\alpha}}{\lambda^\gamma} |t_1 - t_2|^\alpha \leq \frac{C}{\lambda^\gamma} |t_1 - t_2|^\alpha. \end{aligned}$$

Mit $F = \sqrt[\gamma]{C}$ ist die Ungleichung aus Satz 1.2.14 erfüllt.

Seien nun $\frac{i}{n} \leq t_1 < \frac{i+1}{n}$ und $\frac{j}{n} \leq t_2 < \frac{j+1}{n}$ mit $i \neq j$. Dann gilt

$$|X_n(t_1) - X_n(t_2)| \leq \left| X_n(t_1) - X_n\left(\frac{i}{n}\right) \right| + \left| X_n\left(\frac{i}{n}\right) - X_n\left(\frac{j}{n}\right) \right| + \left| X_n\left(\frac{j}{n}\right) - X_n(t_2) \right|$$

und daher folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X_n(t_1) - X_n(t_2)| \geq \lambda) &\leq \\ &\leq \mathbf{P}\left(\left| X_n(t_1) - X_n\left(\frac{i}{n}\right) \right| + \left| X_n\left(\frac{i}{n}\right) - X_n\left(\frac{j}{n}\right) \right| + \left| X_n\left(\frac{j}{n}\right) - X_n(t_2) \right| \geq \lambda\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\left| X_n(t_1) - X_n\left(\frac{i}{n}\right) \right| \geq \frac{\lambda}{3}\right) + \mathbf{P}\left(\left| X_n\left(\frac{i}{n}\right) - X_n\left(\frac{j}{n}\right) \right| \geq \frac{\lambda}{3}\right) \\ &\quad + \mathbf{P}\left(\left| X_n\left(\frac{j}{n}\right) - X_n(t_2) \right| \geq \frac{\lambda}{3}\right). \end{aligned}$$

Auf diese Terme können wir nun den ersten Fall anwenden und erhalten

$$\mathbf{P}(|X_n(t_1) - X_n(t_2)| \geq \lambda) \leq \tilde{C} \frac{|t_1 - i/n|^\alpha}{\lambda^\gamma} + \tilde{C} \frac{|(i-j)/n|^\alpha}{\lambda^\gamma} + \tilde{C} \frac{|j/n - t_2|^\alpha}{\lambda^\gamma}.$$

Wegen $a^\beta + b^\beta + c^\beta \leq (a+b+c)^\beta$ für $a, b, c \geq 0$ und $\beta > 1$ folgt nun

$$\mathbf{P}(|X_n(t_1) - X_n(t_2)| \geq \lambda) \leq \frac{\tilde{C}}{\lambda^\gamma} |t_1 - t_2|^\alpha,$$

womit die Behauptung gezeigt ist. ☞

Durch geeignete Skalierung übertragen sich alle Ergebnisse von $C[0, 1]$ auf $C[0, a]$.

1.2.4 Schwache Konvergenz in $C[0, \infty)$

Auch der Raum $C[0, \infty)$ wird mit der Metrik

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \max_{0 \leq t \leq n} (\min(|x(t) - y(t)|, 1))$$

zu einem vollständigen separablen metrischen Raum. Wie in $C[0, 1]$ sind auch hier stochastische Prozesse durch ihre endlichdimensionalen Verteilungen bestimmt. Weiters ist eine Folge (\mathbf{P}_n) von Wahrscheinlichkeitsmaßen genau dann straff, wenn sie es auf jedem endlichen Intervall $[0, T]$, $T > 0$ ist (Karatzas und Shreve [31]).

1.2.5 Schwache Konvergenz in $D[0, 1]$

Betrachten wir nun den Raum $D = D[0, 1]$, das ist der Raum der auf $[0, 1)$ rechtsstetigen Funktionen mit linksseitigen Grenzwerten auf $(0, 1]$. Mit der Metrik

$$d(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |t - \lambda(t)| \right),$$

wobei $\Lambda = \{f \in C[0, 1] : f(0) = 0, f(1) = 1, f \text{ streng monoton wachsend}\}$, wird auch D zu einem separablen und vollständigen metrischen Raum. Daher ist auch hier eine Familie von

Wahrscheinlichkeitsmaßen relativ kompakt genau dann, wenn sie straff ist. Es lassen sich - in Bezug auf notwendige Kriterien für die schwache Konvergenz - zu $C[0, 1]$ ähnliche Resultate herleiten (ein wesentlicher Unterschied besteht aber darin, dass in D aus der schwachen Konvergenz der Wahrscheinlichkeitsmaße nicht mehr die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen folgt, da die Projektionen nicht mehr stetig sind), siehe Gihman und Skorohod [24]:

Satz 1.2.16 *Seien X_n, X Zufallselemente auf D . Konvergieren die endlichdimensionalen Verteilungen der Folge (X_n) gegen jene von X , so gilt $X_n \xrightarrow{w} X$ genau dann, falls für alle $\epsilon > 0$ die Bedingung*

$$\lim_{c \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\Delta_c(X_n(\cdot)) > \epsilon) = 0$$

mit

$$\Delta_c(X_n(\cdot)) = \sup_{t-c \leq t' \leq t \leq t'' \leq t+c} (\min(|x(t')-x(t)|, |x(t)-x(t'')|)) + \sup_{0 \leq t \leq c} |x(0)-x(t)| + \sup_{1-c \leq t \leq 1} |x(t)-x(1)|$$

erfüllt ist.

Bemerkung 1.2.4 Da

$$\Delta_c(x) \leq \sup_{|t'-t''| \leq c} |x(t') - x(t'')|$$

gilt, reicht es, die Bedingung

$$\lim_{c \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\sup_{|t'-t''| \leq c} |X_n(t') - X_n(t'')| > \epsilon\right) = 0 \quad (1.2)$$

zu zeigen.

Für gewisse Prozesse lässt sich auch hier eine einfachere Bedingung herleiten. Gilt für $X_n(t)$ für $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

$$-\sqrt{n}(t_4 - t_1) \leq X_n(t_3) - X_n(t_2) \leq X_n(t_4) - X_n(t_1) + \sqrt{n}(t_4 - t_1),$$

so ist bereits

$$\mathbf{E}(X_n(t+h) - X_n(t))^4 \leq 4h^2$$

für $h \geq 1/n$ hinreichend für (1.2) (siehe Theorem 6, Seite 437 in [24]).

Mit diesem Satz lässt sich zeigen:

Satz 1.2.17 *Seien X_n, X Zufallselemente auf D . Konvergieren die endlichdimensionalen Verteilungen der Folge (X_n) gegen jene von X , so gilt $X_n \xrightarrow{w} X$, falls es $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ und $C > 0$ gibt, sodass*

$$\mathbf{E}(|X_n(t) - X_n(t_1)|^\gamma |X_n(t_2) - X_n(t)|^\gamma) \leq C(t_2 - t_1)^{1+\alpha}$$

für alle n und $t_1 < t < t_2$ gilt.

Kapitel 2

Diskrete, analytische und probabilistische Methoden

2.1 Erzeugende Funktionen

2.1.1 Erzeugende Funktionen diskreter Zufallsvariablen

Die nun folgenden sowie darüber hinausgehende Ausführungen finden sich in Flajolet und Sedgewick [21].

Ist X eine Zufallsvariable auf \mathbb{N} mit $\mathbf{P}(X = k) = p_k$, dann ist die *wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion* gegeben durch

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \mathbf{E}(z^X).$$

Klarerweise ist $f(z)$ für $|z| \leq 1$ analytisch, wir wollen aber annehmen, dass der Konvergenzradius größer ist. Dann läßt sich der Erwartungswert berechnen durch

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = f'(1).$$

Weiters gilt

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k = f''(1) + f'(1).$$

Damit folgt $\text{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2$. Die charakteristische Funktion $J(u)$ von X ist gegeben durch

$$J(u) = \mathbf{E}e^{iuX} = f(e^{iu}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} p_k$$

und die momentenerzeugende Funktion durch

$$M(t) = \mathbf{E}e^{tX} = f(e^t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} p_k.$$

Die faktoriellen Momente $\mathbf{E}(X(X-1)\cdots(X-k+1))$ können durch

$$\mathbf{E}(X(X-1)\cdots(X-k+1)) = \left. \frac{d^k}{dz^k} f(z) \right|_{z=1} \quad (2.1)$$

ausgedrückt werden. Zwischen den k -ten Momenten μ_k und den k -ten faktoriellen Momenten ϕ_k besteht folgender Zusammenhang:

$$\phi_k = \sum_j (-1)^{k-j} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} \mu_j \quad \mu_k = \sum_j \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} \phi_j,$$

wobei $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ und $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ die Stirling-Zahlen erster und zweiter Art bezeichnen.

Beispiel 2.1.1 *Daher ist*

$$\mu_4 = \phi_1 + 7\phi_2 + 6\phi_3 + \phi_4 = \left(\frac{d}{dz} + 7\frac{d^2}{dz^2} + 6\frac{d^3}{dz^3} + \frac{d^4}{dz^4} \right) f(z) \Big|_{z=1}.$$

2.1.2 Erzeugende Funktionen kombinatorischer Strukturen

Die folgenden Ausführungen über erzeugende Funktionen folgen Drmota und Soria [18], Flajolet und Sedgewick [21], Vitter und Flajolet [38].

Eine kombinatorische Struktur \mathcal{C} ist eine Menge von Objekten o der Größe $|o|$, wobei die Menge $\mathcal{C}_n = \{o \in \mathcal{C} : |o| = n\}$ von Objekten der Größe n endlich ist. Die dazugehörige gewöhnliche erzeugende Funktion ist

$$c(z) = \sum_{o \in \mathcal{C}} z^{|o|} = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$$

und die exponentiell erzeugende Funktion ist

$$\hat{c}(z) = \sum_{o \in \mathcal{C}} \frac{z^{|o|}}{(|o|)!} = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{z^n}{n!},$$

wobei $c_n = |\mathcal{C}_n|$. Meist verwendet man gewöhnliche erzeugende Funktionen für unmarkierte Strukturen und exponentiell erzeugende Funktionen für markierte Strukturen.

Die Stärke der erzeugenden Funktionen liegt nun darin, dass sich kombinatorische Operationen (disjunkte Vereinigung, Produkt, Folgenbildung, ...) leicht auf die erzeugenden Funktionen übersetzen lassen.

Bei den gewöhnlichen erzeugenden Funktionen sind die Grundoperationen die disjunkte Vereinigung zweier Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} - diese wird mit $+$ bezeichnet - und das kartesische Produkt.

Satz 2.1.1 *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ kombinatorische Strukturen mit gewöhnlichen erzeugenden Funktionen $a(z), b(z)$ und $c(z)$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} &\implies c(z) = a(z) + b(z) \\
\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B} &\implies c(z) = a(z)b(z) \\
\mathcal{C} = \text{sequence}(\mathcal{A}) &\implies c(z) = \frac{1}{1-a(z)} \\
\mathcal{C} = \text{powerset}(\mathcal{A}) &\implies c(z) = \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} a(z^k)\right) \\
\mathcal{C} = \text{multiset}(\mathcal{A}) &\implies \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{a(z^k)}{k}\right)
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\text{sequence}(\mathcal{A})$ die Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus \mathcal{A} , $\text{powerset}(\mathcal{A})$ die Potenzmenge von \mathcal{A} und $\text{multiset}(\mathcal{A})$ die Menge aller Multimengen von \mathcal{A} . Ab der dritten Aussage setzen wir voraus, dass alle Elemente positive Größe haben.

Beweis: Da die Vereinigung disjunkt ist, gilt $c_n = a_n + b_n$ und daher $c(z) = a(z) + b(z)$. Für das Produkt folgt $c(z) = a(z)b(z)$ aus

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Die Menge der endlichen Folgen können wir auch schreiben als

$$\text{sequence}(\mathcal{A}) = \{\epsilon\} + \mathcal{A} + \mathcal{A} \times \mathcal{A} + \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} + \dots,$$

wobei ϵ die leere Folge bezeichnet, und damit folgt

$$c(z) = \sum_{k \geq 0} a(z)^k = \frac{1}{1-a(z)}.$$

Für die Potenzmenge sei \mathcal{A} zunächst endlich. Dann gilt

$$\mathcal{C} = \text{powerset}(\mathcal{A}) = \prod_{a \in \mathcal{A}} (\{\epsilon\} + \{a\})$$

und daher

$$c(z) = \prod_{a \in \mathcal{A}} (1 + z^{|a|}) = \prod_{k \geq 1} (1 + z^k)^{a_k}.$$

Durch logarithmieren folgt

$$\begin{aligned}
\log c(z) &= \sum_{k \geq 1} a_k \log(1 + z^k) = \sum_{k \geq 1} a_k \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} z^{nk}}{n} \\
&= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{k \geq 1} a_k z^{nk} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} a(z^n). \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Für den unendlichen Fall definieren wir $\mathcal{C}^{(m)} = \sum_{j=1}^m \mathcal{C}_j$ mit erzeugender Funktion $c^{(m)}(z)$ und analog $\mathcal{A}^{(m)}$ mit $a^{(m)}(z)$. Dann gilt

$$a(z) = a^{(m)}(z) + r(z^{m+1}), \quad c(z) = c^{(m)}(z) + r(z^{m+1}),$$

wobei $r(z^{m+1})$ eine formale Potenzreihe ist, deren Koeffizienten $r_i = 0$ für $0 \leq i \leq m$ sind. $a^{(m)}(z)$ und $c^{(m)}(z)$ stehen in Beziehung (2.2). Lassen wir nun m gegen unendlich gehen, so folgt die Behauptung (zwischen zwei formalen Potenzreihen $a(z)$ und $b(z)$ können wir einen Abstand definieren: $d(a, b) = 2^{-k}$, wobei k der kleinste Index ist, an denen sich die Koeffizienten von $a(z)$ und $b(z)$ unterscheiden, siehe dazu [21]).

Auf ähnliche Weise erhalten wir die Formel für die Klasse der Multimengen, da sie - im Fall, dass \mathcal{A} endlich ist - isomorph zu $\prod_{a \in \mathcal{A}} \text{sequence}(\{a\})$ ist. 

Beispiel 2.1.2 Wir können diesen Satz auch anwenden, um die Koeffizienten von erzeugenden Funktionen zu berechnen. Sei \mathcal{A} die Menge der ebenen Wurzelbäume, dann gilt

$$\mathcal{A} = \{\circ\} \times \text{sequence}(\mathcal{A}).$$

Daher erfüllt die entsprechende erzeugende Funktion $a(z)$

$$a(z) = \frac{z}{1 - a(z)}.$$

Lösen dieser Gleichung liefert die Catalan-Zahlen

$$a_n = C_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Für die exponentiell erzeugenden Funktionen, die für markierte Strukturen eingesetzt werden, sind die Basisoperationen die Vereinigung und das Partitionsprodukt \star . Dieses besteht aus allen Paaren $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, die auf alle möglichen Arten derart ummarkiert werden, dass die Ordnung der Markierungen in a und b erhalten bleiben.

Beispiel 2.1.3 a habe die Markierungen $(3, 1, 2)$ und b $(2, 1)$. Dann sind gültige Markierungen für (a, b) unter anderen $(4, 2, 3; 5, 1)$ oder $(5, 1, 4; 3, 2)$.

Satz 2.1.2 Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ kombinatorische Strukturen mit exponentiell erzeugenden Funktionen $\hat{a}(z), \hat{b}(z)$ und $\hat{c}(z)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} &\implies \hat{c}(z) = \hat{a}(z) + \hat{b}(z) \\ \mathcal{C} = \mathcal{A} \star \mathcal{B} &\implies \hat{c}(z) = \hat{a}(z)\hat{b}(z) \\ \mathcal{C} = \text{sequence}(\mathcal{A}) &\implies \hat{c}(z) = \frac{1}{1-\hat{a}(z)} \\ \mathcal{C} = \text{multiset}(\mathcal{A}) &\implies \hat{c}(z) = \exp(\hat{a}(z)) \\ \mathcal{C} = \text{cycle}(\mathcal{A}) &\implies \hat{c}(z) = \log \frac{1}{1-\hat{a}(z)} \end{aligned}$$

Bei den Folgen und den Multimengen ist wieder die richtige Ummarkierung zu beachten, und $\text{cycle}(\mathcal{A})$ ist die Menge aller Zyklen von Elementen aus \mathcal{A} .

Beweis: Da die Vereinigung disjunkt ist, gilt $c_n = a_n + b_n$ und daher $c(z) = a(z) + b(z)$. Für das Produkt folgt $c(z) = a(z)b(z)$ aus

$$c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k},$$

da es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten des Ummarkierens gibt. Die Folgen beweist man analog zu den gewöhnlichen erzeugenden Funktionen. Für die erzeugende Funktion der Zyklen sind in der erzeugenden Funktion für die Folgen $a(z)^k$ durch $a(z)^k/k$ zu ersetzen, da zyklisch vertauschte Folgen den selben Zyklus ergeben. Ebenso hat man für die Multimengen $a(z)^k$ durch $a(z)^k/k!$ zu ersetzen. ☞

Haben wir nun eine Struktur \mathcal{C} , und sind wir an einer Charakteristik $X(o)$ interessiert, so können wir die entsprechenden Unterstrukturen von o markieren. Dies führt zur bivariaten erzeugenden Funktion

$$c(z, u) = \sum_{m, n \geq 0} c_{mn} z^n u^m$$

mit $c_{mn} = |\{o \in \mathcal{C}_n : X(o) = m\}|$. Offensichtlich gilt $c_n = [z^n]c(z, 1)$. Fassen wir X als Zufallsvariable auf \mathcal{C} auf, so ist die Verteilung von X gegeben durch

$$\mathbf{P}(X(o) = m \mid |o| = n) = \frac{c_{mn}}{c_n}.$$

Sei X_n die Zufallsvariable auf \mathcal{C}_n , für die $\mathbf{P}(X(o) = m) = \frac{c_{mn}}{c_n}$ gilt. Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von X_n ist dann

$$f(u) = \frac{[z^n]c(z, u)}{c_n}$$

Der Erwartungswert von X_n ist daher

$$\mathbf{E}(X_n) = \frac{1}{c_n}[z^n]c_u(z, 1),$$

und es gilt

$$\mathbf{E}(X_n^2) = \frac{1}{c_n}[z^n](c_{uu}(z, 1) + c_u(z, 1)).$$

Die charakteristische Funktion von X_n erhalten wir durch

$$J_n(u) = \frac{1}{c_n}[z^n]c(z, e^{iu}).$$

Beispiel 2.1.4 Sei \mathcal{A} die Menge der gewichteten ebenen Wurzelbäume: Für jeden ebenen Wurzelbaum T bezeichne $|T|$ die Anzahl der Knoten von T . Wir weisen T ein Gewicht

$$\omega(T) = \prod_{k \geq 0} \varphi_k^{n_k(T)}$$

zu, wobei $\varphi_k \in \mathbb{N}$, $\varphi_0 > 0$ sind und $n_k(T)$ die Anzahl der Knoten mit k Nachfolgern ist. Weiters sei

$$a_n = \sum_{T: |T|=n} \omega(T).$$

Dann erfüllt die erzeugende Funktion $a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ die Gleichung

$$a(z) = z\varphi(a(z)) \quad \text{mit} \quad \varphi(t) = \sum_{k \geq 0} \varphi_k t^k.$$

Baumfamilien, die solch eine Gleichung erfüllen, nennen wir einfach erzeugt. Die entsprechende Gleichung für die Struktur \mathcal{A} lautet

$$\mathcal{A} = \Psi(\mathcal{A})$$

mit

$$\Psi(\mathcal{A}) = \varphi_0 \cdot \{\circ\} \cup \varphi_1 \cdot \{\circ\} \times \mathcal{A} \cup \varphi_2 \cdot \{\circ\} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \cup \dots$$

Sei $X_{nd}(T)$ nun die Anzahl der Knoten im Abstand d von der Wurzel. Daher markieren wir in jedem Baum alle Knoten der Ebene d , bezeichne \mathcal{B} diese Menge und $a_d(z, u)$ die erzeugende Funktion. Dann gilt

$$\mathcal{B} = \Psi^d(\{\bullet\} \times \mathcal{A}).$$

Daraus erhalten wir

$$a_d(z, u) = y_d(z, ua(z))$$

mit

$$y_0(z, u) = u, \quad y_{i+1}(z, u) = z\varphi(y_i(z, u)). \quad (2.3)$$

Daraus folgen die Beziehungen

$$\mathbf{P}(X_{nd} = m | T \in \mathcal{A}_n) = \frac{[z^n u^m] a_d(z, u)}{a_n}, \quad J_{kn}(u) = \frac{1}{a_n} [z^n] y_k(z, e^{iu} a(z)).$$

Weitere Beispiele finden sich in Drmota und Soria [18], Flajolet und Sedgewick [21], Vitter und Flajolet [38].

2.2 Berechnung der Koeffizienten erzeugender Funktionen

Um aus der erzeugenden Funktion deren Koeffizienten zu erhalten, gibt es zahlreiche Methoden. Ist die erzeugende Funktion als Produkt oder Zusammensetzung bekannter erzeugender Funktionen gegeben, so kann man mithilfe der Regel für Taylorentwicklungen und Summen die Koeffizienten berechnen. Oft sind die erzeugenden Funktionen aber nicht explizit, sondern implizit durch eine Funktionalgleichung gegeben. Eine Methode dafür ist die Methode des unbestimmten Ansatzes der Koeffizienten. Für eine bestimmte Art von Funktionalgleichungen hilft die Inversionsformel von Lagrange und Bürmann weiter:

Satz 2.2.1 (Langrange-Bürmann-Inversionsformel) Sei $f(z)$ implizit definiert durch

$$f(z) = z\varphi(f(z))$$

mit $\varphi(0) \neq 0$. Dann gelten für $g(z)$ beliebig:

$$\begin{aligned} [z^n] f(z) &= \frac{1}{n} [u^{n-1}] \varphi(u)^n \\ [z^n] f(z)^k &= \frac{k}{n} [u^{n-k}] \varphi(u)^n \\ [z^n] g(f(z)) &= \frac{1}{n} [u^{n-1}] \varphi(u)^n g'(u) \end{aligned}$$

Wir wollen uns nun zwei asymptotischen Methoden zuwenden:

2.2.1 Die Sattelpunktmethode

Die folgende Beschreibung der Sattelpunktmethode folgt Flajolet und Sedgewick [21].

Sattelpunktschranken

Wir betrachten ein Integral einer analytischen Funktion $F(z)$ der Form

$$I = \int_A^B F(z) dz.$$

Ist γ ein Pfad im Analytizitätsbereich von $F(z)$, der A und B verbindet, dann gilt bekanntlich

$$|I| \leq \|\gamma\| \cdot \max_{z \in \gamma} |F(z)|.$$

Der Pfad γ ist aber nicht eindeutig bestimmt, sondern es gibt eine unendliche Klasse Γ von zulässigen Pfaden. Daher folgt

$$|I| \leq \min_{\gamma \in \Gamma} \left[\|\gamma\| \cdot \max_{z \in \gamma} |F(z)| \right].$$

Derartige Abschätzungen nennt man *Sattelpunktschranken der ersten Art*. Liegt der Pfad in einem beschränkten Gebiet der komplexen Ebene, so ist für asymptotische Abschätzungen der Faktor $\|\gamma\|$ meist uninteressant. Dies führt zur Suche des Minimums von

$$\min_{\gamma \in \Gamma} \left[\max_{z \in \gamma} |F(z)| \right].$$

Daher betrachtet man Sattelpunkte, denn ein Pfad, der A und B verbindet, durch den Sattelpunkt geht und den steilsten Anstieg dorthin wählt, minimiert sicher $\max_{z \in \gamma} |F(z)|$. Daraus erhält man *Sattelpunktschranken der zweiten Art*

$$|I| \leq \|\gamma_0\| \cdot \max_{z \in \gamma_0} |F(z)|, \quad \gamma_0 \text{ minimiert } \max_{z \in \gamma} |F(z)|.$$

Klarerweise liefern Sattelpunktschranken der ersten Art bessere Abschätzungen als Schranken der zweiten Art.

Von besonderem Interesse sind Cauchy-Integrale

$$g_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz,$$

wobei $g(z)$ nichtnegative Koeffizienten hat. Dann gibt es für gewöhnlich einen Sattelpunkt auf der reellen Achse. Nehmen wir zusätzlich an, dass für $g(z)$ (mit positiven oder unendlichen Konvergenzradius R) $g(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow R^-$ gilt, so folgt wegen $F(0^+) = F(R^-) = +\infty$, dass es einen Punkt $x_0 \in (0, R)$ gibt, an dem die Ableitung von $F(z)$ verschwindet. Wählen wir Γ gleich der Klasse der Kreise mit Mittelpunkt 0, so erhalten wir für die Sattelpunktschranke zweiter Art

$$g_n \leq \frac{g(x_0)}{x_0^n}, \quad x_0 \text{ Lösung von } x \frac{g'(x)}{g(x)} = n + 1.$$

Beispiel 2.2.1 Wir betrachten die inversen Faktoriellen

$$K_n = \frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z^{n+1}} dz.$$

Die Sattelpunktgleichung liefert sofort $x_0 = n + 1$ und daher

$$K_n \leq \frac{e^{n+1}}{(n+1)^n}.$$

Sattelpunktmethode

Die Grundidee ist die folgende: Man versucht einen Integrationsweg γ durch Täler und einen Sattelpunkt z_0 derart zu wählen, dass der Integrand im Sattelpunkt sein Maximum erreicht, und nur der Beitrag in einer kleinen Umgebung des Sattelpunktes für das gesamte Integral von Bedeutung ist. Ist dies der Fall, kann man mittels Approximation des Integranden in dieser Umgebung eine asymptotische Abschätzung für das Integral erhalten.

Wir setzen nun $F_n(z) = e^{f_n(z)}$. Die Sattelpunktgleichung $F'(z) = 0$ geht dann über in $f'(z) = 0$.

Im Detail geht man folgendermaßen vor: Man teilt γ in zwei Teile γ_1 und γ_2 , wobei γ_1 den Sattelpunkt z_0 enthält und schätzt die Integrale $\int_{\gamma_1} F(z)$ und $\int_{\gamma_2} F(z)$ separat ab. Die Wege γ_1 und γ_2 sollten wie folgt gewählt werden:

- (i) Der Beitrag von γ_2 sollte vernachlässigbar sein, dh.

$$\int_{\gamma_2} F(z) dz = o\left(\int_{\gamma} F(z) dz\right).$$

- (ii) Auf γ_1 sollte für $f(z)$ die Entwicklung

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 f''(z_0) + O(\epsilon_n) \quad \epsilon_n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

gelten. Ist dies der Fall, so folgt

$$\int_{\gamma_1} F(z) dz \sim e^{f(z_0)} \int_{\gamma_1} e^{\frac{1}{2}(z-z_0)^2 f''(z_0)} dz.$$

- (iii) Ist der Anstieg zum Sattelpunkt steilstmöglich gewählt, so ist $(z - z_0)^2 f''(z)$ dort negativ. Dann sollte gelten:

$$\int_{\gamma_1} e^{\frac{1}{2}(z-z_0)^2 f''(z_0)} dz \sim i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} f''(z_0) x^2} dx \equiv i \sqrt{\frac{2\pi}{f''(z_0)}}.$$

Daraus ergeben sich zwei einander widerstrebende Anforderungen an γ_1 : Um Bedingung (ii) zu erfüllen, muss γ_1 hinreichend klein gewählt werden. Andererseits muss γ_1 groß genug sein, um Bedingung (iii) erfüllen zu können.

Bemerkung 2.2.1 Für die Wahl der Länge $\delta = \delta(n)$ von γ_1 ist oft folgender Ansatz erfolgreich:

$$f'''(z_0)\delta^3 \rightarrow 0, \quad f''(z_0)\delta^2 \rightarrow \infty.$$

Bemerkung 2.2.2 In der Praxis ist es oft schwierig die genaue Lage des Sattelpunktes zu bestimmen (wenn der Integrand z.B. von Parametern abhängt), oft reichen aber schon Wege, die in der Nähe des Sattelpunktes verlaufen, um gute Abschätzungen zu erreichen.

Beispiel 2.2.2 Wir betrachten wieder die inversen Faktoriellen. Als Integrationsweg wählen wir aber nicht den Kreis mit Radius $n + 1$, sondern mit Radius n (dies liefert gleich gute Ergebnisse, vereinfacht aber die Notation). Setzen wir $z = ne^{i\theta}$, so erhalten wir

$$K_n = \frac{1}{2\pi i n^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ne^{i\theta} - in\theta} d\theta.$$

Für $\pi > \theta > \delta > 0$ ergibt sich wegen

$$\cos \theta \leq \cos \delta \leq 1 - \frac{\delta^2}{2} + O(\delta^4)$$

$$A := \left| \frac{1}{2\pi i n^n} \int_{\delta}^{\pi} e^{ne^{i\theta} - in\theta} d\theta \right| \leq \frac{e^{n \cos \delta}}{n^n} \leq n^{-n} e^{n - \frac{n\delta^2}{2} + O(n\delta^4)}$$

Damit der rechte Term im Vergleich zu $n^{-n} \exp n$ klein wird, muss $\delta < n^c$ mit $0 > c > -1/2$ sein.

Nach der obigen Heuristik für die Wahl von δ sollte gelten

$$n\delta^2 \rightarrow \infty, \quad n\delta^3 \rightarrow 0.$$

Demnach können wir $\delta = n^c$ mit $-1/3 > c > -1/2$ wählen. Nehmen wir z.B. $c = -2/5$. Dann ergibt sich für hinreichend großes n

$$A \leq n^{-n} e^{n - \frac{n^{1/5}}{3}},$$

und für den Bereich $-\delta > \theta > -\pi$ gilt die gleiche Abschätzung.

Wegen

$$ne^{i\theta} - in\theta = n \left(1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{i\theta^3}{6} + O(\theta^4) \right)$$

für $\theta \rightarrow 0$ und $n\delta^3 \rightarrow 0$ gilt

$$\left| \frac{1}{2\pi i n^n} \int_{-\delta}^{\delta} e^{ne^{i\theta} - in\theta} d\theta \right| \sim \frac{e^n}{2\pi n^n} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-n\theta^2/2} d\theta.$$

Weiter ist

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-n\theta^2/2} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n\theta^2/2} d\theta - 2 \int_{\delta}^{\infty} e^{-n\theta^2/2} d\theta = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} - O\left(e^{-\frac{n^{1/5}}{2}}\right).$$

Daher gilt insgesamt

$$\frac{1}{n!} \sim \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n n^n}}.$$

Die Sattelpunktmethode Schritt für Schritt durchzurechnen, ist meist sehr mühsam. Man kann aber - unter gewissen Voraussetzungen - allgemeine Sätze anwenden. Das Überprüfen der Voraussetzungen ist meist einfacher als die gesamte Methode durchzurechnen. Dazu seien

$$a(r) := r \frac{f'(r)}{f(r)} \quad \text{und} \quad b(r) := r \frac{f'(r)}{f(r)} + r^2 \frac{f''(r)}{f(r)} - r^2 \frac{f'(r)^2}{f(r)^2}.$$

Definition 2.2.1 $f(z)$ habe positiven oder unendlichen Konvergenzradius R und sei positiv auf einem Teilintervall (R_0, R) von $(0, R)$. Erfüllt $f(z)$ weiters die Bedingungen

(i) $\lim_{r \rightarrow R} b(r) = +\infty$,

(ii) Es gibt eine auf (R_0, R) definierte Funktion $\delta(r)$ nach $(0, \pi)$ mit

$$f(re^{i\theta}) \sim f(r)e^{i\theta a(r) - \theta^2 b(r)/2} \quad \text{für } r \rightarrow R_0,$$

gleichmäßig in $|\theta| \leq \delta(r)$, und

(iii) Gleichmäßig in $\delta(r) \leq |\theta| < \pi$

$$f(re^{i\theta}) = o\left(\frac{f(r)}{\sqrt{b(r)}}\right),$$

dann heißt $f(z)$ *Hayman-zulässig* oder *H-zulässig*.

Bemerkung 2.2.3 Diese Definition geht auf Hayman [30] zurück.

Für H-zulässige Funktionen gilt folgende Asymptotik:

Satz 2.2.2 ([21]) Sei $f(z)$ H-zulässig und $\zeta = \zeta(n)$ die einzige Lösung der Sattelpunktgleichung

$$\zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = n$$

in (R_0, R) . Dann gilt für $n \rightarrow \infty$

$$f_n \sim \frac{f(\zeta)}{\zeta^n \sqrt{2\pi b(\zeta)}}$$

mit $b(z) = z^2 h''(z) + zh'(z)$ und $h(z) = \log f(z)$.

Weiters sind H-zulässige Funktionen unter gewissen Operationen abgeschlossen:

Satz 2.2.3 ([21]) Seien $f(z)$ und $g(z)$ zulässig und $p(z)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Dann gilt:

(i) Das Produkt $f(z)g(z)$ ist zulässig.

(ii) $e^{f(z)}$ ist zulässig.

(iii) Die Summe $f(z) + p(z)$ ist zulässig. Ist der führende Koeffizient von $p(z)$ positiv, dann sind auch $f(z)p(z)$ und $p(f(z))$ zulässig.

(iv) Sind fast alle Taylor-Koeffizienten von $e^{p(z)}$ positiv, dann ist auch $e^{p(z)}$ zulässig.

2.2.2 Singularitätsanalyse

Eine ausführliche Behandlung der Singularitätsanalyse findet sich in Flajolet und Odlyzko [20] und Flajolet und Sedgewick [21].

Die Singularitätsanalyse nützt den Zusammenhang zwischen der lokalen Entwicklung einer Funktion $f(z)$ um ihre dominante Singularität und ihren Koeffizienten. Wir setzen im weiteren voraus, dass f eine einzige dominante Singularität bei ω besitzt und wegen

$$[z^n]f(z) = \omega^n [z^n]f\left(\frac{z}{\omega}\right) = \omega^n [z^n]g(z) \quad \text{mit } f\left(\frac{z}{\omega}\right) = g(z)$$

sei diese ohne Beschränkung der Allgemeinheit an $z = 1$.

Eine lokale Entwicklung hat typischerweise die Gestalt

$$f(z) = g(z) + O(h(z)) \quad \text{mit } g(z) \gg h(z) \text{ für } z \rightarrow 1.$$

Damit folgt formal

$$f_n = [z^n]f(z) = [z^n]g(z) + [z^n]O(h(z)).$$

Die Singularitätsanalyse basiert auf zwei Säulen:

- (i) Ein Katalog von asymptotischen Entwicklungen von Koeffizienten in Standardfunktionen.
- (ii) Transfer-Sätze, die es erlauben, von Entwicklungen mit Fehlertermen auf das asymptotische Wachstum der Koeffizienten zu schließen, dh. wir sind interessiert an Bedingungen, unter denen gilt

$$f(z) = O(h(z)) \Rightarrow f_n = O(h_n)$$

und auch analog für o, \sim .

Die Grundlage dafür ist die Integralformel von Cauchy mit geeigneten Integrationswegen, die der Singularität sehr nahe kommen. Exemplarisch möchten wir nun einen Transfer-Satz und einen Satz über die Asymptotik von Koeffizienten in Standardfunktionen beweisen.

Satz 2.2.4 (Transfer-Satz, [20]) Seien $\eta > 0$, $0 < \phi < \pi/2$ und

$$\Delta = \Delta(\phi, \eta) = \{z : |z| < 1 + \eta, |\arg(z - 1)| \geq \phi\}.$$

Sei weiters $f(z)$ mit Ausnahme der Singularität $z = 1$ in Δ analytisch und es gelte

$$f(z) = O(|1 - z|^\alpha) \quad \text{für } z \rightarrow 1 \text{ in } \Delta \tag{2.4}$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f_n = O(n^{-\alpha-1}).$$

Beweis: Da $|1 - z|^\alpha$ für jede kompakte Teilmenge von $\Delta \setminus \{1\}$, in der $f(z)$ analytisch ist, nach unten durch eine positive Konstante beschränkt ist, ist (2.4) äquivalent zur Existenz einer Konstanten $K > 0$, sodaß in ganz $\Delta \setminus \{1\}$ gilt

$$|f(z)| < K|1 - z|^\alpha. \tag{2.5}$$

Abbildung 2.1: Der Bereich Δ und der Integrationsweg γ zu Satz 2.2.4.

Weiters sei $n \geq 2|\alpha| + 4$. Nach der Integralformal von Cauchy ist

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

mit $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ und

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left\{ z : |z-1| = \frac{1}{n}, |\arg(z-1)| \geq \phi \right\} \\ \gamma_2 &= \left\{ z : \frac{1}{n} \leq |z-1|, |z| \leq 1+\eta, \arg(z-1) = \phi \right\} \\ \gamma_3 &= \{ z : |z-1| = 1+\eta, |\arg(z-1)| \geq \phi \} \\ \gamma_4 &= \bar{\gamma}_2 = \left\{ z : \frac{1}{n} \leq |z-1|, |z| \leq 1+\eta, \arg(z-1) = -\phi \right\}. \end{aligned}$$

Nun werten wir die Integrale separat aus. Zunächst setzen wir noch

$$f_{nj} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j} \frac{|f(z)|}{|z^{n+1}|} dz.$$

Mit (2.5) folgen mittels elementarer Abschätzungen für $n \geq 4$ sofort

$$f_{n1} \leq 5(Kn^{-\alpha-1}) \quad \text{und} \quad f_{n3} \leq K \frac{\eta^\alpha}{(1+\eta)^n}. \quad (2.6)$$

Für f_{n2} substituieren wir $z = 1 + (te^{i\phi}/n)$ und erhalten

$$f_{n2} \leq \frac{1}{2\pi} \int_1^{En} K \left(\frac{t}{n} \right)^\alpha \left| 1 + \frac{e^{i\phi}t}{n} \right|^{-n-1} \frac{dt}{n} \leq (Kn^{-\alpha-1}) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_1^\infty t^\alpha \left| 1 + \frac{e^{i\phi}t}{n} \right|^{-n-1} dt,$$

wobei E so gewählt ist, dass γ_1 und γ_3 verbunden werden, also E ist die positive Wurzel von $|1 + Ee^{i\phi}| = 1 + \eta$. Um das Integral abzuschätzen, bemerken wir zunächst

$$\left| 1 + \frac{e^{i\phi}t}{n} \right| \geq 1 + \Re \left(\frac{e^{i\phi}t}{n} \right) = 1 + \frac{t}{n} \cos \phi.$$

Daraus folgt

$$\int_1^\infty t^\alpha \left| 1 + \frac{e^{i\phi}t}{n} \right|^{-n-1} dt \leq \int_1^\infty t^\alpha \left(1 + \frac{t}{n} \cos \phi \right)^{-n} dt =: J_n.$$

Da

$$J_n \rightarrow \int_1^\infty t^\alpha e^{-t \cos \phi} dt \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

sind die J_n durch eine von n unabhängige Konstante nach oben beschränkt. Weiters ist $(1 + c/n)^{-n}$ für $c > 0$ monoton fallend in n , daher folgt

$$f_{n2} < \frac{J(\alpha, \phi)}{2\pi} K^{-\alpha-1} \quad \text{mit } J(\alpha, \phi) = \int_1^\infty t^\alpha \left(1 + \frac{t \cos \phi}{\nu} \right)^{-\nu} dt, \quad (2.7)$$

wobei $\nu = 2|\alpha| + 4$ ist.

Für f_{n4} erhält man wegen der Symmetrie die gleiche Abschätzung.

Mit (2.6), (2.7) haben wir somit für $n \geq 2|\alpha| + 4$

$$f_n < (Kn^{-\alpha-1}) \left(5 + \frac{J(\alpha, \phi)}{\pi} + \frac{\eta^\alpha}{(1+\eta)^n} n^{\alpha+1} \right).$$

Da aber der letzte Term für hinreichend großes n kleiner als 1 wird, folgt

$$f_n < (Kn^{-\alpha-1}) \left(6 + \frac{J(\alpha, \phi)}{\pi} \right)$$

für n hinreichend groß. ☞

Allgemeiner gilt sogar ([21]):

Satz 2.2.5 Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f(z)$ mit Ausnahme einer Singularität an $z = 1$ analytisch in Δ und es gelte

$$f(z) = O \left((1-z)^\alpha \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^\beta \right) \quad \text{für } z \rightarrow 1 \text{ in } \Delta.$$

Dann gilt

$$f_n = O(n^{-\alpha-1} \log^\beta n).$$

Bemerkung 2.2.4 Analoge Aussagen gelten auch für o .

Satz 2.2.6 (Standard-Asymptotik, [20]) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2, \dots\}$, und $f(z)$ habe die Gestalt

$$f(z) = (1-z)^\alpha \left(\frac{1}{z} \log \frac{1}{1-z} \right)^\beta.$$

Dann gilt

$$f_n \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\log n)^\beta \left(1 + \sum_{k \geq 1} \frac{e_k^{(\alpha, \beta)}}{\log^k n} \right)$$

mit

$$e_k^{(\alpha, \beta)} = (-1)^k \binom{\beta}{k} \Gamma(-\alpha) \frac{d^k}{ds^k} \left(\frac{1}{\Gamma(-s)} \right) \Big|_{s=\alpha}.$$

Abbildung 2.2: Die Integrationswege γ und H zu Satz 2.2.6

Beweis: Da $f(z)$ in $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty]$ analytisch ist, verwenden wir als Integrationsweg für das Cauchy-Integral $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, wobei

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \left\{ z : z = 1 - \frac{e^{i\theta}}{n}, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\} \\ \gamma_2 &= \left\{ z : z = 1 + \frac{t+i}{n}, t \in [0, n] \right\} \\ \gamma_3 &= \left\{ z : |z| = \left(4 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}, \Re(z) \leq 2 \right\} \\ \gamma_4 &= \bar{\gamma}_2.\end{aligned}$$

Der Beitrag von γ_3 ist exponentiell klein: $f_{n3} = O(2^{-n})$.

Sei nun $f_{n124} = f_{n1} + f_{n2} + f_{n4}$. Substituieren wir nun $z = 1 + t/n$, so ergibt sich

$$n^{\alpha+1} f_{n124} = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_1} (-t)^\alpha \left(\log\left(-\frac{n}{t}\right)\right)^\beta \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n-1-\beta} dt.$$

H_1 ist dabei eine offene Schleife im Abstand 1 um $[0, n]$. Sei H'_1 jener Teil von H_1 , sodaß $|t| < \log^2 n$ erfüllt ist. Entlang $H_1 \setminus H'_1$ enthält der Integrand einen Faktor der Form $e^{-c \log^2 n}$ und ist daher vernachlässigbar. Auf H_1 verwenden wir die Approximation $(1 + (t/n))^{-n} \approx e^{-t}$ und erhalten

$$n^{\alpha+1} f_{n124} = \frac{1}{2\pi i} \int_{H'_1} (-t)^\alpha \left(\log\left(-\frac{n}{t}\right)\right)^\beta e^{-t} dt + O\left(\frac{\log^2 n}{n}\right). \quad (2.8)$$

Auf H_1 gilt weiters $\log t \ll \log n$, und daher können wir wie folgt entwickeln:

$$\left(\log\left(-\frac{n}{t}\right)\right)^\beta = (\log n)^\beta \left(\sum_{k=0}^{m-1} \binom{\beta}{k} (-1)^k \left(\frac{\log(-t)}{\log n}\right)^k + O\left(\left(\frac{\log(-t)}{\log n}\right)^m\right)\right).$$

Setzen wir dies in (2.8) ein, erhalten wir

$$\frac{n^{\alpha+1} f_{n124}}{\log^\beta n} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{\beta}{k} (-1)^k \frac{1}{2\pi i \log^k n} \int_{H'_1} (-t)^\alpha (\log(-t))^k e^{-t} dt + O\left(\frac{1}{\log^m n}\right).$$

Ersetzen wir nun H'_1 durch H , wobei H dadurch entsteht, dass wir die geradlinigen Teile von H'_1 nach $+\infty$ fortsetzen, so folgt, da der Fehler exponentiell klein ist,

$$\frac{n^{\alpha+1} f_{n124}}{\log^\beta n} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} (-1)^k \frac{G_k}{\log^k n} \quad \text{mit } G_k = \frac{1}{2\pi i} \int_H (-t)^\alpha (\log(-t))^k e^{-t} dt.$$

Für $k=0$ gilt aber $G_0 = 1/\Gamma(-\alpha)$, und da G_k die k te Ableitung von G_0 bezüglich α ist, folgt die Behauptung. 

Bemerkung 2.2.5 Den Integrationsweg H aus diesem Beweis bezeichnet man als *Hankel-Kontur*.

2.3 Poissonapproximation

Hier gehen wir nach Arratia und Tavaré [5], [6] vor.

Haben wir eine kombinatorische Struktur \mathcal{C} , und sei \mathcal{C}_n die Menge der Objekte der Größe n , versehen mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß. Der stochastische Vektor

$$\mathbf{C}(n) = (C_1(n), \dots, C_n(n))$$

zähle Unterstrukturen der Größe $1, \dots, n$. Dessen Komponenten sind klarerweise nicht unabhängig. Da dies beim Rechnen mitunter mit Schwierigkeiten verbunden ist, möchte man dies umgehen. Dazu wählt man unabhängige Zufallsvariablen Z_1, Z_2, \dots , sodass

$$\mathbf{P}(\mathbf{C}(n) = \mathbf{a}) = \mathbf{P}((Z_1, \dots, Z_n) | T_n = n), \quad T_n = \sum_{i=1}^n i Z_i,$$

gilt. Damit wird also die kombinatorische Verteilung $\mathbf{C}(n)$ auf die gemeinsame Verteilung von Z_1, \dots, Z_n bedingt durch T_n zurückgeführt. Wir werden die Existenz solcher Zufallsvariablen Z_i zeigen, werden das aber in einem allgemeineren Setting tun.

Dazu sei I eine endliche Indexmenge, und für alle $\alpha \in I$ seien Funktionen $g_\alpha: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ und eine Gewichtsfunktion $w: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ gegeben. Weiters existiere für Zielfunktionswerte t eine normierende Konstante $f(I, t)$, sodass

$$\mathbf{P}(\mathbf{C}_I = \mathbf{a}) = \mathbf{1}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{a} = t) f(I, t) \prod_{\alpha} g_\alpha(a_\alpha) \quad (2.9)$$

eine Verteilung auf \mathbb{R}^d ist. Dabei ist $\mathbf{w} = (w(\alpha))_{\alpha \in I}$. Weiters existieren für ein $x > 0$ normierende Konstanten $c_\alpha(x) \in (0, \infty)$, sodass für alle $\alpha \in I$

$$\mathbf{P}(Z_\alpha = k) = c_\alpha(x) g_\alpha(k) x^{w(\alpha)k} \quad (2.10)$$

eine Verteilung auf \mathbb{Z}^+ ist, und sei

$$T = \sum_{\alpha \in I} w(\alpha) Z_\alpha.$$

Dann gilt der folgende Satz ([6]):

Satz 2.3.1 $\mathbf{Z}_I = (Z_\alpha)_{\alpha \in I}$ habe unabhängige Koordinaten Z_α mit Verteilung (2.10), und \mathbf{C}_I habe Verteilung (2.9). Analog seien $\mathbf{Z}_B, \mathbf{C}_B$ für $B \subseteq I$ definiert. Dann gelten

$$\mathbf{C}_I \stackrel{d}{=} (\mathbf{Z}_I | T = t) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{C}_B \stackrel{d}{=} (\mathbf{Z}_B | T = t) \quad (2.12)$$

$$\mathbf{P}(T = t) = f(I, t)^{-1} x^t \prod_{\alpha} c_{\alpha}(x) \quad (2.13)$$

Beweis: Betrachten wir die Verteilung von Z_I :

$$\mathbf{P}(Z_I = \mathbf{a}) = \prod_{\alpha} c_{\alpha}(x) g_{\alpha}(\mathbf{a}_{\alpha}) x^{w(\alpha) \mathbf{a}_{\alpha}} = x^{\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}} \prod_{\alpha} c_{\alpha} \prod_{\alpha} g_{\alpha}(\mathbf{a}_{\alpha})$$

für $\mathbf{a} \in (\mathbb{Z}^+)^I$. Ist $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a} = t$, dann ist

$$\mathbf{P}(Z_I = \mathbf{a}) = x^t \prod_{\alpha} c_{\alpha} f(I, t)^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{C}_I = \mathbf{a}).$$

Damit können wir nun die bedingte Wahrscheinlichkeit von Z_I und $T = t$ berechnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_I = \mathbf{a} | T = t) &= \frac{\mathbf{1}(t = \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{P}(Z_I = \mathbf{a})}{\mathbf{P}(T = t)} = \frac{x^t (\prod c_{\alpha}) f(I, t)^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{C}_I = \mathbf{a})}{\mathbf{P}(T = t)} \\ &= \frac{x^t (\prod c_{\alpha}) f(I, t)^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{C}_I = \mathbf{a})}{\sum_{\mathbf{b} \in (\mathbb{Z}^+)^I} x^t (\prod c_{\alpha}) f(I, t)^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{C}_I = \mathbf{b})} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{C}_I = \mathbf{a})}{\sum_{\mathbf{b}} \mathbf{P}(\mathbf{C}_I = \mathbf{b})} \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{C}_I = \mathbf{a}) \end{aligned}$$

◻

Bemerkung 2.3.1 Im anfangs betrachteten Fall ist $I = \{1, \dots, n\}$, $d = 1$ und $w(i) = i$ für $i \in I$.

Bemerkung 2.3.2 Für die Wahl von x schlagen Arratia und Tavaré vor, x nahe dem Maximum von $\mathbf{P}(T = t)$ zu wählen. Die Wahl von x ist aber nicht eindeutig ([6]).

Die Methode der Approximation durch unabhängige Zufallsvariablen lässt sich insbesondere auf die folgenden drei unterschiedlichen Klassen von Problemen anwenden:

- (i) markierte Objekte: z.B. Permutationen, Partionen von Mengen, Abbildung von $\{1, \dots, n\}$ auf sich selbst
- (ii) Multimengen: z.B. Polynome über einem endlichen Körper, Partitionen von ganzen Zahlen
- (iii) Auswahlen: z.B. Partitionen von ganzen Zahl in unterschiedliche Summanden, quadratfreie Polynome über einem endlichen Körper

Beispiel 2.3.1 Betrachten wir die markierten Objekte: m_i bezeichne die Anzahl der markierten Strukturen der Größe i . Dann gilt

$$|\{\text{markierte Objekte mit } \mathbf{C}(n) = \mathbf{a}\}| = \mathbf{1}(a_1 + 2a_2 + na_n = n) n! \prod_{i=1}^n \frac{m_i^{a_i}}{(i!)^{a_i} a_i!}$$

wobei $m_i = (i-1)!$ für Permutationen, $m_i = (i-1)!(1+i+i^2/2+\dots+i^{i-1}/(i-1)!)$ für Abbildungen und $m_i = 1$ für Partitionen ist. Im obigen Kontext ist hier also

$$f(I, t) = \frac{n!}{p(n)},$$

wobei $p(n)$ die Anzahl aller Möglichkeiten ist, also $p(n) = n!$ für Permutationen, $p(n) = n^n$ für Abbildungen und $p(n) = B_n$ die Bellzahlen für Partitionen. Weiters ist

$$g_i(k) = \left(\frac{m_i}{i!}\right)^k \frac{1}{k!}.$$

Mit $\lambda_i = (m_i x^i)/i!$ ist

$$c_i \left(\sum_{k \geq 0} g_i(k) x^{ik} \right)^{-1} = e^{-\lambda_i}$$

für alle $x > 0$. Daher sind die Z_i poissonverteilt mit Mittelwert und Varianz λ_i . Außerdem gilt

$$\mathbf{P}(T_n = T) = \frac{p(n)}{n!} x^n e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i}.$$

Für den Fall der Multimengen sind die Z_i negativ binomialverteilt und für den Fall der Auswahlen binomialverteilt ([6]).

Eine wichtige Größe in diesem Zusammenhang ist die Distanz der totalen Variation, die die Güte der Approximation misst:

Definition 2.3.1 Die Distanz der totalen Variation zweier Zufallsvariablen X, Y auf einem höchstens abzählbaren Raum S ist

$$d_{TV} := \frac{1}{2} \sum_{s \in S} |\mathbf{P}(X = s) - \mathbf{P}(Y = s)|.$$

Bemerkung 2.3.3 Eine alternative Definition der Distanz der totalen Variation ist

$$d_{TV} = \inf_{\text{Kopplungen}} \mathbf{P}(X \neq Y).$$

Eine Kopplung zweier Wahrscheinlichkeitsmaße X_1, X_2 auf einem Raum S ist ein Maß Y auf S^2 , dessen Randverteilungen X_1 bzw. X_2 sind.

Satz 2.3.2 Ist S diskret, so gilt

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \quad \text{genau dann, wenn} \quad d_{TV}(X_n, X) \rightarrow 0.$$

Für den Fall der kombinatorischen Verteilung und seiner Approximation durch unabhängige Zufallsvariablen lässt sich d_{TV} wie folgt berechnen ([6]):

Satz 2.3.3 Sei I eine endliche Indexmenge, $B \subseteq I$, C_α, Z_α Zufallsvariablen, Z_α unabhängig, w eine Gewichtsfunktion, T wie oben, t so, dass $\mathbf{P}(T = t) > 0$. Weiters seien

$$R := \sum_{\alpha \in B} w(\alpha) Z_\alpha, \quad S := \sum_{\alpha \in I \setminus B} w(\alpha) Z_\alpha,$$

sodass $T = R + S$, R und S unabhängig. Gilt außerdem (mit den Bezeichnungen aus Satz 2.3.1)

$$\mathbf{C}_I = (\mathbf{Z}_I | T = t),$$

dann ist

$$d_{TV}(\mathbf{C}_B, \mathbf{Z}_B) = d_{TV}((R | T = t), R).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} 2d_{TV}(\mathbf{C}_B, \mathbf{Z}_B) &= \sum_{\mathbf{a} \in (\mathbb{Z}^+)^B} |\mathbf{P}(\mathbf{Z}_B = \mathbf{a} | T = t) - \mathbf{P}(\mathbf{Z}_B = \mathbf{a})| \\ &= \sum_r \sum_{\mathbf{a}: \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} = r} \left| \frac{\mathbf{P}(\mathbf{Z}_B = \mathbf{a}, r + S = t)}{\mathbf{P}(T = t)} - \mathbf{P}(\mathbf{Z}_B = \mathbf{a}) \right| \\ &= \sum_r \sum_{\mathbf{a}: \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} = r} \left| \frac{\mathbf{P}(\mathbf{Z}_B = \mathbf{a}) \mathbf{P}(r + S = t)}{\mathbf{P}(T = t)} - \mathbf{P}(\mathbf{Z}_B = \mathbf{a}) \right| \\ &= \sum_r \left| \frac{\mathbf{P}(R = r) \mathbf{P}(r + S = T)}{\mathbf{P}(T = t)} - \mathbf{P}(R = r) \right| \\ &= \sum_r \left| \frac{\mathbf{P}(R = r, r + S = T)}{\mathbf{P}(T = t)} - \mathbf{P}(R = r) \right| \\ &= \sum_r |\mathbf{P}(R = r | T = t) - \mathbf{P}(R = r)| = 2d_{TV}((R | T = t), R) \end{aligned}$$

◻

Bemerkung 2.3.4 Die gebräuchlichste Form für die Distanz der totalen Varianz ist die folgende:

$$d_{TV} = \frac{1}{2} \sum_r \left| \frac{\mathbf{P}(R = r) \mathbf{P}(r + S = T)}{\mathbf{P}(T = t)} - \mathbf{P}(R = r) \right|.$$

In unserem Fall, dass $t = n$ und $T = T_n$ sind, gilt

$$d_{TV}(\mathbf{C}_B, \mathbf{Z}_B) = \frac{1}{2} \mathbf{P}(R > n) + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^n \mathbf{P}(R = r) \left| \frac{\mathbf{P}(S = n - r)}{\mathbf{P}(T = n)} - 1 \right|.$$

Da für uns hier nur die markierten Strukturen von Interesse sind halten wir das Additionstheorem für Poissonvariablen fest:

Satz 2.3.4 Seien X_i , $i = 1, \dots, n$ poissonverteilte Zufallsvariablen mit Parameter λ_i . Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim P_{\sum_{i=1}^n \lambda_i}.$$

Beispiel 2.3.2 ([5]) Sei $C_j(n)$ die Anzahl der Zyklen der Größe j einer n -Permutation und

$$K(n) = \sum_{j=1}^n C_j(n)$$

die Gesamtzahl aller Zyklen. Wir werden nun skizzieren, wie sich mittels Poissonapproximation

$$\frac{K_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1)$$

zeigen lässt.

Wir führen Poissonvariablen Z_j mit Parameter $1/j$ ein und schreiben

$$\frac{K_n - \log n}{\sqrt{\log n}} = \frac{\sum_{j=1}^n Z_j - \log n}{\sqrt{\log n}} + R_n$$

mit

$$R_n = \frac{\sum_{j=1}^n (C_j(n) - Z_j)}{\sqrt{\log n}}.$$

Wegen Satz 2.3.4 ist $\sum_{j=1}^n Z_j$ poissonverteilt mit Parameter $\sum_{j=1}^n 1/j \sim \log n$. Daher folgt sofort

$$\frac{\sum_{j=1}^n Z_j - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1).$$

Nach Arratia, Barbour und Tavaré [4] folgt, dass es eine Kopplung von $(C_j(n))_{j \geq 1, n \geq 1}$ und $(Z_j)_{j \geq 1}$ gibt mit

$$R_n^* = \frac{\sum_{j=1}^n |C_j(n) - Z_j|}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{P} 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Da $|R_n| \leq R_n^*$, folgt die Behauptung mit Satz 1.2.2.

Kapitel 3

Anwendungen in der Kombinatorik

Sei \mathcal{C} eine kombinatorische Struktur und \mathcal{C}_n die Menge der Elemente der Größe n . Für $o \in \mathcal{C}_n$ seien $X_{nj}(o)$, $j = 0 \dots k$, $k \in \mathbb{Z}$ die Anzahl der Unterstrukturen der Größe gleich oder kleiner gleich j von o . Versehen wir \mathcal{C}_n mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß, so werden die $X_{nj} =: X_n(j)$ zu Zufallsvariablen. Für $t \notin \mathbb{Z}$ können wir $X_n(t)$ entweder durch lineare Interpolation

$$X_n(t) = (\lfloor t \rfloor + 1 - t)X_n(\lfloor t \rfloor) + (t - \lfloor t \rfloor)X_n(\lfloor t \rfloor + 1)$$

oder durch

$$X_n(t) = X_n(\lfloor t \rfloor)$$

definieren. Dadurch erhalten wir einen kontinuierlichen stochastischen Prozess mit $I = [0, k]$. Im ersten Fall hat dieser Prozess stetige Pfade, im zweiten Fall Pfade in $D[0, k]$. Skaliert man noch geeignet, kann man das Verhalten dieser Prozesse für $n \rightarrow \infty$ untersuchen. Mittels der vorgestellten Methoden lassen sich funktionale Grenzwertsätze zeigen.

Diese Methoden erlauben es aber nur, die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen für den Stufenprozess zu zeigen. Wegen

$$X_n(t) = X_n(\lfloor t \rfloor) + (X_n(t) - X_n(\lfloor t \rfloor))$$

folgt aber daraus bereits die Konvergenz der Verteilungen für den interpolierten Prozess, falls

$$(X_n(t) - X_n(\lfloor t \rfloor)) \xrightarrow{P} 0 \tag{3.1}$$

(siehe Satz 1.2.2). Hat man aber die Straffheit für den interpolierten Prozess, so folgt daraus bereits (3.1), vgl. Bemerkung 3.1.2.

3.1 Zufällige Bäume

Zufällige Bäume finden Anwendung in der Beschreibung von Verzweigungsprozessen (siehe [23]) und bieten mehrere interessante Charakteristiken.

3.1.1 Zufällige Bäume und Verzweigungsprozesse

Galton-Watson-Prozesse

Betrachten wir eine Menge von Teilchen, von denen jedes nach einer festen Zeitspanne Nachkommen des gleichen Typs nach folgenden Regeln produziert, dabei bezeichne Z_i die Anzahl der Teilchen der i -ten Generation:

- $(Z_i)_{i \geq 0}$ ist eine Markovkette, d.h. Z_{n+1} hängt nur von Z_n ab,
- die Teilchen sind voneinander unabhängig, d.h. die Anzahl der Nachkommen eines Teilchens hängt weder von den vergangenen Generationen, noch von den Teilchen derselben Generation ab.

Ein derartiger stochastischer Prozess $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *Galton-Watson-Verzweigungsprozess* (kurz Galton-Watson-Prozess). Sei $Z_0 = 1$ und $p_k = \mathbf{P}(Z_1 = k)$. Dann folgt für die Wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen $f_i(z)$ von Z_i

$$\begin{aligned} f_0(z) &= z \\ f_{n+1}(z) &= f(f_n(z)). \end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{E}(Z_n) = f'_n(1) = f'_1(1)^n$ folgt

$$\mathbf{E}Z_n \begin{cases} \rightarrow 0 & \text{falls } f'_1(1) < 1 \\ = 1 & \text{falls } f'_1(1) = 1 \\ \rightarrow \infty & \text{falls } f'_1(1) > 1 \end{cases} .$$

Daher unterscheidet man drei Klassen von Prozessen: subkritische ($f'_1(1) < 1$), kritische ($f'_1(1) = 1$) und superkritische Prozesse ($f'_1(1) > 1$).

Die *Aussterbewahrscheinlichkeit* des Prozesses (Z_n) ist gegeben durch

$$\mathbf{P}(Z_n \rightarrow 0) = \mathbf{P}(Z_n = 0, n \geq n_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0).$$

Satz 3.1.1 Die Aussterbewahrscheinlichkeit ist gleich der kleinsten positiven Lösung der Gleichung $z = f_1(z)$.

Bemerkung 3.1.1 1 ist immer Lösung der Aussterbegleichung.

Folgerung 3.1.1 Da $f(z) - z$ auf $[0, 1]$ streng monoton fallend für subkritische und kritische Prozesse ist, sterben diese mit Wahrscheinlichkeit 1 aus, während superkritische Prozesse mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht aussterben.

Der Zusammenhang mit Zufallsbäumen

Aus einem Galton-Watson-Prozess mit einem Erzeuger erhalten wir einen Baum, indem wir jedes Teilchen mit seinen Nachkommen verbinden; sei T dieser Baum. Möchten wir Bäume einer festen Größe n untersuchen, so können wir einen Galton-Watson-Prozess mit der Bedingung

$$\sum_{k \geq 0} Z_k = n$$

betrachten; einen derartigen Baum bezeichnen wir mit T_n .

Bezeichnen wir für einen Knoten v eines gegebenen Baumes t mit $d(v)$ die Anzahl seiner Nachfolger und $n_k(t)$ die Anzahl aller Knoten in t mit genau k Nachfolgern, so gilt

$$\mathbf{P}(T = t) = \prod_{v \in t} p_{d(v)} = \prod_{k \geq 0} p_k^{n_k(t)}. \quad (3.2)$$

Dadurch wird die Verteilung von T_n bestimmt, da auf der Menge Ω_n , der Menge der Bäume der Größe n $\mathbf{P}(T = t)$ proportional zu $\mathbf{P}(T_n = t)$ ist.

Dieselbe Gewichtung der Bäume aus Ω_n erhält man auf mittels einfach erzeugter Baumfamilien (siehe dazu Beispiel 2.1.4): In solch einer Baumfamilie wird jeder Baum t mit

$$\prod_{k \geq 0} \varphi_k^{n_k(t)} \quad (3.3)$$

gewichtet. Wählt man $\tau > 0$ derart, dass $\varphi(\tau) < \infty$, so definiert

$$\mathbf{P}(Z_1 = k) = \frac{\varphi_k \tau^k}{\varphi(\tau)}$$

eine Verteilung eines bedingten Verzweigungsprozesses. Jeder Prozess dieser Art liefert dieselbe Verteilung für T_n . Weiters stimmen (3.2) und (3.3) bis auf den Faktor

$$\frac{\tau^{|t|-1}}{\varphi(\tau)^{|t|}}$$

überein. Daher sind bedingte Galton-Watson-Prozesse und einfach erzeugte, gleichverteilte Zufallsbäume äquivalent.

Die Eigenschaft, dass T ein kritischer Prozess ist, geht bei Zufallsbäumen über in die Bedingung

$$\tau \varphi'(\tau) = \varphi(\tau).$$

Eine wichtige Größe in Zusammenhang mit Bäumen ist

$$\sigma^2 = \frac{\tau^2 \varphi''(\tau)}{\varphi(\tau)};$$

diese kann als Varianz von Z_1 interpretiert werden.

3.1.2 Profil

Ein Merkmal von Bäumen ist ihr Profil: Bezeichne $L_T(k)$ die Anzahl der Knoten im Abstand k von der Wurzel. Ist T ein zufälliger Baum mit n Knoten, dann wird $L_T(k)$ zu einer Zufallsvariablen $L_n(k)$. Für $t \notin \mathbb{N}$ interpolierten wir linear

$$L_n(t) = ([t] + 1 - t)L_n([t]) + (t - [t])L_n([t] + 1)$$

und definieren den skalierten Prozess

$$l_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} L_n(t\sqrt{n}).$$

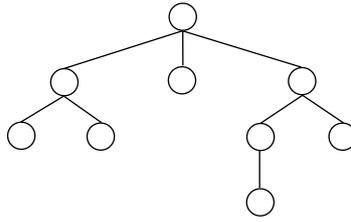


Abbildung 3.1: ein Baum



Abbildung 3.2: Das Profil zum Baum aus Abbildung 3.1: definiert über die Knoten (links) und über die Blätter (rechts)

Genauso können wir auch Blätter im Abstand k von der Wurzel eines Baumes T betrachten, diese Anzahl sei mit $\hat{L}_T(k)$ bezeichnet. Wählen wir T wieder zufällig gemäß (3.3), so erhalten wir die Zufallsvariable $\hat{L}_n(k)$. Durch Interpolation und Skalierung erhalten wir analog zu $l_n(t)$ den Prozess $\hat{l}_n(t)$.

Drmotá und Gittenberger [16] zeigten

Satz 3.1.2 Sei $\varphi(t)$ die erzeugende Funktion einer Familie zufälliger Bäume. $W^+(s)$ bezeichne die skalierte Brown'sche Exkursion und $l(t)$ die lokale Zeit bei t . $\varphi(t)$ habe einen endlichen oder unendlichen Konvergenzradius R und $\text{ggT}\{i : \varphi_i > 0\} = 1$. Die Gleichung

$$t\varphi'(t) = \varphi(t)$$

habe eine minimale positive Lösung $\tau < R$. Weiters sei

$$\sigma^2 = \frac{\tau^2 \varphi''(\tau)}{\varphi(\tau)}.$$

Dann gelten

$$l_n(t) \xrightarrow{w} \frac{\sigma}{2} l\left(\frac{\sigma}{2}t\right)$$

und

$$\hat{l}_n(t) \xrightarrow{w} \frac{\varphi_0}{\varphi(\tau)} \frac{\sigma}{2} l\left(\frac{\sigma}{2}t\right)$$

in $C[0, \infty)$.

Beweisidee: Wir wählen einen Zugang über erzeugende Funktionen und verwenden dazu Beispiel 2.1.4. Daraus gewinnen wir eine Integraldarstellung für die charakteristischen Funktionen des Prozesses. Der Integrationsweg in dieser Darstellung ist eine Hankel-Kontur. Eine

entsprechende Darstellung kann für die charakteristischen Funktionen der lokalen Zeit der Brown'schen Exkursion gefunden werden.

Um die Straffheit zu zeigen, reicht es die Intervalle $[0, A\sqrt{n}]$ mit $A \in \mathbb{R}^+$ zu betrachten. Dazu reicht es, eine Abschätzung der Form

$$\mathbf{P} \left(|L_n(\rho\sqrt{n}) - L_n((\rho + \theta)\sqrt{n})| \geq \epsilon\sqrt{n} \right) \leq C \frac{\theta^\alpha}{\epsilon^\beta} \quad (3.4)$$

für ein $\alpha > 1, \beta \geq 0$ und $C > 0$ für $0 \leq \rho \leq \rho + \theta \leq A$ zu zeigen (siehe Satz 1.2.14). In Analogie zu Satz 1.2.15 ist dafür ausreichend, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass

$$\mathbf{E} (L_n(r) - L_n(r + h))^4 \leq Ch^2n \quad (3.5)$$

für alle $n, r, h \in \mathbb{N}$ gilt. Dieses Moment berechnen wir mittels geeigneter Darstellung der faktoriellen Momente und unter Zuhilfenahme des Transfer-Satzes 2.2.4. \square

Beweis: Wir schließen an Beispiel 2.1.4 an. Weiters sei

$$a_{dmn} = \sum_{T \in \mathcal{A}_n, L_T(d)=m} \omega(T).$$

Dann gilt

$$\mathbf{P} (L_n(d) = m | T \in \mathcal{A}_n) = \frac{a_{dmn}}{a_n}.$$

Wegen

$$a_d(z, u) = \sum_{n, m \geq 0} a_{dmn} u^m z^n$$

ist die charakteristische Funktion von $\frac{1}{\sqrt{n}}L_n(k)$

$$J_{kn}(u) = \frac{1}{a_n} [z^n] y_k(z, e^{iu/\sqrt{n}}a(z)).$$

Ähnlich erhält man die charakteristische Funktion von $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}L_k(k_1), \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}L_n(k_p)\right)$:

$$J_{k_1, \dots, k_p n}(u_1, \dots, u_p) = \frac{1}{a_n} [z^n] y_k \left(z, e^{iu_1/\sqrt{n}} y_{k_2 - k_1} \left(z, \dots, y_{k_p - k_{p-1}} \left(z, e^{iu_p/\sqrt{n}} a(z) \right) \dots \right) \right) \quad (3.6)$$

Um aber mittels Cauchyscher Integralformel die Koeffizienten zu berechnen, benötigen wir mehr Information über das Verhalten der Rekursion (2.3) (für einen Beweis siehe [16]):

Lemma 3.1.1 *Sei z_0 der Punkt des Konvergenzkreises von $a(z)$, der auf der positiven reellen Achse liegt. Weiters seien $z = z_0(1 + x/n)$ und $\alpha = z\varphi'(a(z))$. Unter den Voraussetzungen $|t - a(z)| = O(n^{-1/2})$ und $x/n \rightarrow 0$ derart, dass $|\arg(-x)| < \pi$ und*

$$\left| 1 - \sqrt{\frac{-x}{n}} \right| \leq 1 + \frac{C}{\sqrt{n}},$$

gilt

$$y_k(z, t) = a(z) + \frac{(t - a(z))\alpha^k}{\frac{\sqrt{-x/n + \sigma(\tau-t)/\tau\sqrt{2}}}{2\sqrt{-x/n}} + \frac{\sqrt{-x/n - \sigma(\tau-t)/\tau\sqrt{2}}}{2\sqrt{-x/n}} \alpha^k} + O\left(\sqrt{\frac{|x|}{n}}\right)$$

gleichmäßig für $k = O(\sqrt{n})$.

Für die charakteristischen Funktionen der endlichdimensionalen Verteilungen des Profil-Prozesses gilt:

Satz 3.1.3 Seien $k_i = \kappa_i \sqrt{n}$, $i = 1, \dots, p$ mit $0 < \kappa_1 < \dots < \kappa_p$. Dann läßt sich

$$J_{\kappa_1, \dots, \kappa_p}(u_1, \dots, u_p) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_{\kappa_1, \dots, \kappa_p n}(u_1, \dots, u_p)$$

darstellen als

$$J_{\kappa_1, \dots, \kappa_p}(u_1, \dots, u_p) = 1 + \frac{\sigma}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma} f_{\kappa_1, \dots, \kappa_p, \sigma}(x, u_1, \dots, u_p) e^{-x} dx$$

mit

$$\begin{aligned} f_{\kappa_1, \dots, \kappa_p, \sigma}(x, u_1, \dots, u_p) &= \\ &= \Psi_{\kappa_1, \sigma}(x, iu_1 + \Psi_{\kappa_2 - \kappa_1, \sigma}(\dots \Psi_{\kappa_{p-1} - \kappa_{p-2}, \sigma}(x, iu_{p-1} + \Psi_{\kappa_p - \kappa_{p-1}, \sigma}(x, iu_p)) \dots)) \end{aligned}$$

und

$$\Psi_{\kappa\sigma}(x, u) = \frac{u\sqrt{-x}e^{-\kappa\sigma\sqrt{-x/2}}}{\sqrt{-x}^{\kappa\sigma\sqrt{-x/2}} - t\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sinh(\kappa\sigma\sqrt{-\frac{x}{2}})}. \quad (3.7)$$

Die Hankel-Kontur $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{s : |s| = 1, \Re(s) \leq 0\} \\ \gamma_2 &= \{s : \Im(s) = 1, \Re(s) \geq 0\} \\ \gamma_3 &= \bar{\gamma}_2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Bemerkung 3.1.2 Wir werden diesen Satz nur für den Stufenprozess $\frac{1}{\sqrt{n}}L_n(\lfloor t\sqrt{n} \rfloor)$ zeigen. Wegen (3.4) folgt aber

$$\mathbf{P}(|L_n(\rho\sqrt{n}) - L_n(\lfloor \rho\sqrt{n} \rfloor)| \geq \epsilon\sqrt{n}) \leq \frac{C}{\epsilon^4 n} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Daher reicht es, den Satz nur für den Stufenprozess zu zeigen.

Beweis: Wir werden nur den zweidimensionalen Fall betrachten, der allgemeine Fall folgt durch iteriertes Anwenden der Vorgehensweise aus dem folgenden Beweis: Seien $k, h \in \mathbb{N}$. Aus (3.6) erhalten wir mittels der Integralformel von Cauchy

$$J_{k, k+h, n}(u, v) = \frac{1}{2\pi i a_n} \int_{\Gamma} y_k(z, e^{iu/\sqrt{n}} y_h(z, e^{iv/\sqrt{n}} a(z))) \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Dabei ist $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ mit

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left\{ z = z_0 \left(1 + \frac{x}{n}\right) : \Re x \leq 0, |x| = 1 \right\} \\ \Gamma_2 &= \left\{ z = z_0 \left(1 + \frac{x}{n}\right) : \Im x = 1, 0 \leq \Re x \leq \log^2 n \right\} \\ \Gamma_3 &= \bar{\Gamma}_2 \\ \Gamma_4 &= \left\{ z : |z| = z_0 \left|1 + \frac{\log^2 n + i}{n}\right|, \arg\left(1 + \frac{\log^2 n + i}{n}\right) \leq |\arg(z)| \leq \pi \right\}. \end{aligned}$$

Für $z \in \gamma' = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ sei $z = z_0(1 + x/n)$ und $s = e^{iu/\sqrt{n}}$ und $t = e^{iv/\sqrt{n}}$. Nun können wir Lemma 3.1.1 anwenden und erhalten

$$y_h(z, ta(z)) = a(z) + R_h(t, z)$$

mit

$$R_h(t, z) = \frac{(t-1)a(z)\alpha^k}{\frac{\sqrt{-x/n + \frac{\sigma}{\tau\sqrt{2}}(\tau - ta(z))}}{2\sqrt{-x/n}} + \frac{\sqrt{-x/n - \frac{\sigma}{\tau\sqrt{2}}(\tau - ta(z))}}{2\sqrt{-x/n}}}\alpha^h + O\left(\sqrt{\frac{|x|}{n}}\right)$$

und

$$y_k(z, sy_h(z, ta(z))) = a(z) + R_k(s, t, z)$$

mit

$$R_k(s, t, z) = \frac{(a(z)(s-1) + sR_h(t, z))\alpha^k}{\frac{1}{2}\left(1 + \alpha^k + \frac{\sigma}{\tau\sqrt{-2x/n}}(\tau - sa(z) - sR_h(t, z))(1 - \alpha^k)\right) + O\left(\sqrt{\frac{|x|}{n}}\right)}.$$

Seien nun u und v fix gewählt und seien $k = \lfloor \kappa\sqrt{n} \rfloor$ und $h = \lfloor \eta\sqrt{n} \rfloor$. Wegen (siehe [22])

$$a(z) = \tau - \frac{\tau\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{1 - \frac{z}{z_0}} + O\left(\left|1 - \frac{z}{z_0}\right|\right) \quad (3.9)$$

um die Singularität $z_0 = 1/\varphi'(\tau)$ folgen für $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} a(z)(s-1) &= \frac{iu\tau}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{\sqrt{|x|}}{n}\right), \\ \alpha^k &= \exp\left[-2\kappa\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{-x}\right]\left(1 + O\left(\frac{|x|}{\sqrt{n}}\right)\right), \\ \tau - sa(z) &= \tau(1-s) + \frac{s\tau\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{\frac{-x}{n}} + O\left(\frac{|x|}{n}\right) = -\frac{iu\tau}{\sqrt{n}} + \frac{\tau\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{\frac{-x}{n}} + O\left(\frac{|x|}{n}\right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Damit ergeben sich

$$\begin{aligned} R_k(s, t, z) &\sim \frac{\tau}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{-x} \exp\left[-\kappa\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{-x}\right] \left(iu + \frac{\sqrt{n}}{\tau}R_h\right)}{\sqrt{-x} \exp\left[\kappa\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{-x}\right] - \left(iu + \frac{\sqrt{n}}{\tau}R_h\right) \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sinh\left(\kappa\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{-x}\right)} \\ R_h &\sim \frac{\tau}{\sqrt{n}} \frac{iv\sqrt{-x} \exp\left[-\eta\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{-x}\right]}{\sqrt{-x} \exp\left[\eta\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{-x}\right] - iv\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sinh\left(\eta\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{-x}\right)}. \end{aligned}$$

Für $x = y \pm i$ gilt $R_k(s, t, z) \sim 1$ für $y \rightarrow \infty$ und daher ist das Ersetzen von γ' durch γ aus (3.8) nach dem Satz der dominierten Konvergenz gerechtfertigt.

Bemerken wir zunächst

$$\frac{\partial}{\partial x_2} y_h(x_1, x_2) \Big|_{x_1=z, x_2=a(z)} = \alpha^h.$$

Mit Taylorentwicklung folgt daraus

$$\begin{aligned} y_k(z, sy_h(z, ta(z))) &= a(z) + a(z)\alpha^k \left(s - 1 + \alpha^h(t-1)s + O((t-1)^2)\right) \\ &\quad + O\left((s-1 + \alpha^h(t-1)s)^2\right). \end{aligned}$$

Der Term $a(z)$ liefert über Γ den Beitrag 1, daher müssen wir nur noch den zweiten Term auf Γ_4 abschätzen. Da α auf Γ_4 das Maximum für $z \in \gamma' \cap \Gamma_4$ erreicht gilt (3.10) und wegen $\Re\sqrt{-x} \sim 1/(2 \log n)$ für $x = \log^2 n \pm i$ gilt $\alpha^k = O(1)$ für $z \in \Gamma_4$. Da aber α auf γ' für $z = z_0(1 - 1/n)$ minimal wird, folgt

$$\max_{z \in \Gamma_4} |\alpha^k| = O\left(\min_{z \in \gamma'} |\alpha^k|\right).$$

Mit $|z^{-n-1}| \sim e^{-\log^2 n}$ für $z \in \Gamma_4$ und der Bemerkung, dass die Länge von γ' ein $O(\log^2 n/n)$ ist, folgt dass der Beitrag von Γ_4 vernachlässigbar ist:

$$\left| \int_{\Gamma_4} R_k(s, t, z) \frac{dz}{z^{n+1}} \right| = O\left(\left| \int_{\gamma'} R_k(s, t, z) \frac{dz}{z^{n+1}} \right| \frac{n}{\log^2 n} e^{-\log^2 n} \right).$$

Wegen $a_n \sim (\tau/\sqrt{2\pi\sigma^2}) z_0^{-n} n^{-3/2}$ (siehe abermals [22]) folgt die Behauptung. ◻

Ebenfalls mit einem Zugang über erzeugende Funktionen kann eine entsprechende Darstellung für die charakteristischen Funktionen der lokalen Zeit der Brown'schen Exkursion gezeigt werden. Eine andere Möglichkeit führt über die Exkursions-Theorie (siehe dazu [16]).

Für die Straffheit zeigen wir nun (3.5): Da der Koeffizient

$$a_{nkl,rh} = [z^n u^k v^l] y_r(z, u y_h(z, v a(z)))$$

die gewichtete Anzahl an Bäumen der Größe n mit k Knoten in Ebene r und l Knoten in Ebene $r + h$ ist, gilt

$$\mathbf{P}(L_n(r) = k, L_n(r+h) = l) = \frac{a_{nkl,rh}}{a_n}$$

und daher auch

$$\mathbf{P}(L_n(r) - L_n(r+h) = m) = \frac{1}{a_n} [z^n u^m] y_r(z, u y_h(z, u^{-1} a(z))).$$

Daraus folgt

$$\mathbf{E}(L_n(r) - L_n(r+h))^4 = \frac{1}{a_n} [z^n] H_{rh}(z)$$

mit

$$H_{rh}(z) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + 7 \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 6 \frac{\partial^3}{\partial u^3} + \frac{\partial^4}{\partial u^4} \right) y_r(z, u y_h(z, u^{-1} a(z))) \Big|_{u=1}$$

Um diese Koeffizienten berechnen zu können, benötigen wir eine geeignete Darstellung von $H_{rh}(z)$. Diese liefert uns

Lemma 3.1.2 *Sei $\alpha = z\varphi'(a(z))$ und $\Delta = \{z : |z| < z_0 + \eta, |\arg(z - z_0)| > \vartheta\}$ mit $\eta > 0$ und $0 < \vartheta < \pi/2$. Dann gilt*

$$H_{rh}(z) = G_{1,rh}(z) \frac{(1 - \alpha^h)^2}{(1 - \alpha)^3} + G_{2,rh}(z) \frac{1 - \alpha^h}{(1 - \alpha)^2} + G_{3,rh}(z) \frac{1}{1 - \alpha} + G_{4,rh}(z),$$

wobei die $G_{j,rh}$, $1 \leq j \leq 4$ gleichmäßig beschränkt für $z \in \Delta$ und $r, h \geq 0$ sind.

Beweis: Zunächst gilt wegen $y_{r+1}(z, u) = z\varphi(y_r(z, u))$

$$\frac{\partial y_{r+1}}{\partial u} = z\varphi'(y_r) \frac{\partial y_r}{\partial u}.$$

Wegen $y_r(z, a(z)) = a(z)$ hat diese Rekursion die Lösung

$$\frac{\partial y_r}{\partial u}(z, a(z)) = \alpha^r.$$

Daraus erhält man

$$\left. \frac{\partial}{\partial u} y_r(z, u y_h(z, u^{-1}a(z))) \right|_{u=1} = a(z)\alpha^r (1 - \alpha^h).$$

Aus (3.9) kann man ableiten

$$\sup_{z \in \Delta} |\alpha| = 1,$$

und damit haben wir $G_{4, rh}(z)$.

Ähnlich erhält man die anderen Ausdrücke. ☞

Aufgrund der Asymptotik für a_n reicht es

$$[z^n] H_{rh}(z) = O\left(z_0^{-n} \frac{h^2}{\sqrt{n}}\right)$$

gleichmäßig für $r, h \geq 0$ zu zeigen. Wegen $H_{r0}(z) \equiv 0$, können wir $h \geq 1$ voraussetzen. Wir betrachten den ersten Term von $H_{rh}(z)$:

$$G_{1, rh}(z) \frac{(1 - \alpha^h)^2}{(1 - \alpha)^3} = G_{1, rh}(z) \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{i=0}^{h-1} \alpha^i \sum_{j=0}^{h-1} \alpha^j = \sum_{i, j=0}^{h-1} G_{1, rh}(z) \frac{\alpha^{i+j}}{1 - \alpha} = O\left(h^2 \frac{1}{|1 - \alpha|}\right)$$

Wegen

$$\frac{1}{1 - \alpha} = O\left(\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{-1/2}\right)$$

können wir Satz 2.2.4 mit $\alpha = -1/2$ anwenden und erhalten (der Faktor z_0^{-n} kommt wegen der Normierung dazu)

$$[z^n] G_{1, rh}(z) \frac{(1 - \alpha^h)^2}{(1 - \alpha)^3} = O\left(z_0^{-n} h^2 n^{-1/2}\right).$$

Ähnlich behandelt man die anderen Terme.

Der Beweis für $\hat{l}_n(t)$ verläuft ähnlich. ☞

3.1.3 Kontur

Sei T ein Baum, dessen Blätter von links nach rechts nummeriert sind. Die Tiefe $h_T(x)$ eines Knoten $x \in T$ ist die Anzahl der Kanten auf dem eindeutig bestimmten Pfad von x zur Wurzel des Baumes. Mit $\hat{h}_T(m)$ bezeichnen wir die Tiefe des m -ten Blattes. Die Folge $(\hat{h}_T(1), \dots, \hat{h}_T(n))$ heißt Kontur des Baumes T (mit n Blättern). Wählen wir T aus einer

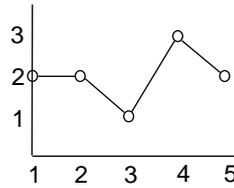


Abbildung 3.3: Die Kontur (unskaliert) des Baumes aus Abbildung 3.1

Klasse \mathcal{A} von Bäumen mit n Knoten, dann wird $\hat{h}_T(m)$ eine Zufallsvariable, welche wir mit $\hat{H}_n(m)$ bezeichnen. Für $x \notin \mathbb{N}$ interpolieren wir wieder linear. Der skalierte Prozess

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{H}_n(nt), \quad 0 \leq t \leq 1$$

heißt Kontur-Prozess.

Gutjahr und Pflug [27] zeigten für binäre Bäume die Konvergenz des Kontur-Prozesses gegen die Brown'sche Exkursion:

Satz 3.1.4

$$X_n(t) \xrightarrow{w} \sqrt{8}W^+(t)$$

in $C[0, 1]$.

Beweisidee: Der Beweis beruht darauf, den Grenzwert der Dichten der endlichdimensionalen Verteilungen von $X_n(t)$ explizit zu berechnen und eine Markov-Eigenschaft nachzuweisen. Da auch die Brown'sche Exkursion ein Markov-Prozess ist, und die eindimensionalen sowie die bedingten Verteilungen übereinstimmen, folgt die Konvergenz gegen die Brown'sche Exkursion. Die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen stützt sich darauf, diese auf Unterstrukturen eines Baumes zurückzuführen: Sei T ein Baum und seien τ_0, \dots, τ_k Blatt-indices mit $\tau_0 < \dots < \tau_k$. Dazu definieren wir Bereiche \mathcal{B}_i : \mathcal{B}_i ist jener Teil von T , der die Blätter $\tau_{i-1}, \tau_{i-1} + 1, \dots, \tau_i$ enthält und durch den Pfad von τ_{i-1} nach τ_i begrenzt wird. Durch $\tau_0 < \dots < \tau_k$ wird ein eingebetteter Baum T' induziert: T' besteht aus den Blättern $\tau_0 < \dots < \tau_k$ und internen Knoten v_1, \dots, v_k , wobei v_i der Knoten auf dem gemeinsamen Pfad von τ_{i-1} und τ_i zur Wurzel ist, der maximale Tiefe hat. Der Pfad zum Blatt i in T' entspricht dem Pfad zum Blatt τ_i in T .

Weiters führen wir die Größen S_{ij} ein: S_{ij} sei die Anzahl der internen Knoten auf der Begrenzungslinie zwischen \mathcal{B}_i und \mathcal{B}_j ohne die beiden äußersten Knoten. Damit ist es möglich \hat{H}_i auf die Größen S_{ij} zurückzuführen:

$$\hat{H}_i = \sum_{(p,q)} S_{pq} + O(k),$$

wobei die Summe über alle Kanten in T' verläuft und eine Kante durch die Nummern der angrenzenden Bereiche repräsentiert wird. Damit und mit weiteren ähnlichen Konstruktionen wird die Verteilung der S_{ij} auf H_i hochgezogen.

Der Beweis für die Straffheit führt über Satz 1.2.14.



Satz 3.1.6 *Mit den Voraussetzungen aus Satz 3.1.5 gilt*

$$X_n(t) \xrightarrow{w} \frac{2}{\sigma} W^+(t)$$

in $C[0, 1]$.

Bemerkung 3.1.3 Dieses Resultat wurde zuvor bereits von Aldous [1] auf probabilistischem Wege bewiesen.

Ausgehend vom Traversierungsprozess lassen sich weitere Prozesse definieren (siehe [33]): Für $i = 0, \dots, n-1$ sei v_i der i -te besuchte Knoten bei der Preorder-Durchmusterung, der noch nicht durchlaufen wurde, und $d_i = d(v_i)$ sei die Anzahl der Nachfolger des Knoten v_i . Der DFQP (depth first queue process) S_n für einen Baum T mit n Knoten ist definiert durch $S_n(0) = 0$ und

$$S_n(j) = \sum_{i=1}^{j-1} (d_i - 1), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Der Tiefen-Prozess h_n ist durch

$$h_n(j) = h_T(v_j), \quad 0 \leq j \leq n-1$$

gegeben. Dabei bezeichnet $h_T(v_j)$ die Tiefe des Knoten v_j in T .

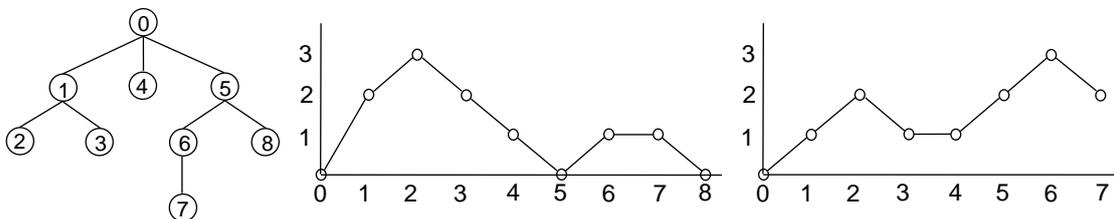


Abbildung 3.5: Der Baum aus Abbildung 3.1 mit der Reihenfolge der Knoten bei der Preorder-Durchmusterung, der DFQP (Mitte) und der Tiefen-Prozess (rechts)

Geben wir eine fixe Anzahl j von Nachfolgern vor, so können wir auch den Prozess betrachten, der aus den Tiefen der Knoten mit j Nachfolgern hervorgeht betrachten. Ein weiterer Prozess lässt sich durch die Höhen der Knoten definieren, deren Unterbaum ein vorgegebener Baum T' ist. Marckert und Mokkadem [33] zeigten auf probabilistischem Weg, dass all diese Prozesse (linear interpoliert und geeignet skaliert) in $C[0, 1]$ gegen die Brown'sche Exkursion konvergieren. Der Beweis beruht darauf, die Konvergenz für den DFQP zu zeigen, und die Konvergenz der anderen Prozesse auf diesen bzw. den Tiefen-Prozess zurückzuführen.

3.2 Zufallsabbildungen

Sei Ω_n die Menge aller Abbildungen der Menge $\{1, \dots, n\}$ auf sich selbst. Zu einer Abbildung $\phi \in \Omega_n$ sei G_ϕ folgender gerichtete Graph: $V = \{1, \dots, n\}$ und $E = \{(i, j) \mid \phi(i) = j\}$.

Beispiel 3.2.1 Sei $\phi: \{1, \dots, 15\} \rightarrow \{1, \dots, 15\}$ mit

$$(1, \dots, 15) \mapsto (4, 3, 7, 8, 4, 4, 3, 1, 4, 15, 12, 9, 9, 12, 1).$$

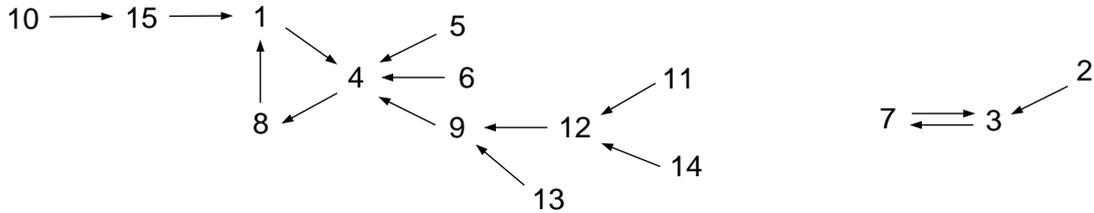


Abbildung 3.6: Der Graph zur Abbildung aus Beispiel 3.2.1

Im Zusammenhang mit Zufallsabbildungen lassen sich mehrere Charakteristiken untersuchen:

3.2.1 Zusammenhangskomponenten

Die Zufallsvariable $X_n(t) = X_n(t, \phi)$ zähle die Zusammenhangskomponenten der Größe $\leq n^t$ von G_ϕ . Dann konvergiert der Prozess

$$Y_n(t) = \frac{X_n(t) - (t/2) \ln n}{\sqrt{(1/2) \ln n}}, \quad t \in [0, 1],$$

gegen die Standard-Brown'sche Bewegung (Hansen [28], [29]).

Beweisidee: Zunächst verwenden wir die Idee der Poissonapproximation, um die Abhängigkeit der Zufallsvariablen α_k , die die Zahl der Zusammenhangskomponenten der Größe k zählt, zu umgehen. m_n sei die Anzahl der zusammenhängenden Abbildungen aus Ω_n . Wir führen Hilfsräume $\Omega_z = \{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in \mathbb{N}\}$ ein, und \mathbf{P}_z sei das Produktmaß auf Ω_z , sodass die Verteilung der k -ten Komponente Poisson mit Mittelwert $(m_k/k!)(z/e)^k$ ist. Weiters sei Ψ eine Funktion auf Ω_z , dann erhalten wir daraus eine Funktion Ψ_n auf Ω_n wie folgt: Für $\phi \in \Omega_n$ sei $\Psi_n(\phi) = \Psi(\alpha_1(\phi), \alpha_2(\phi), \dots, \alpha_n(\phi), 0, 0, \dots)$. \mathbf{E}_z bezeichne den Erwartungswert bezüglich \mathbf{P}_z und \mathbf{E}_n den Erwartungswert bezüglich \mathbf{P}_n (das ist die uniforme Verteilung auf Ω_n). Dann folgt

$$\mathbf{E}_n(\Psi_n) = [z^n] \frac{e^n n!}{n^n} S(z/e) \mathbf{E}_z(\Psi). \tag{3.11}$$

mit $S(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m^m/m!)(x)^m$.

Anstelle des Prozesses $Y_n(t)$ betrachten wir

$$\bar{Y}_n(t) = \frac{X_n(t) - \sum_{k=1}^{n^t} m_k/k!(z_n/e)^k}{\sqrt{(1/2) \ln n}}, \quad t \in [0, 1].$$

mit geeigneten z_n . Für die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen unterscheiden wir zwei Fälle: Für $0 \leq t < t' < 1$ zeigen wir, dass $(\bar{Y}_n(t), \bar{Y}_n(t') - \bar{Y}_n(t))$ gegen $((Z(t), Z(t') -$

t) konvergiert, wobei $Z(t)$ und $Z(t' - t)$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit Mittelwert 0 und Varianz t bzw. $t' - t$ sind. Nach Cramér-Wold (Satz 1.2.8) und der Methode der Momente (Satz 1.2.7) reicht es für $a, b \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}^+$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_n(a\bar{Y}_n(t) + b(\bar{Y}_n(t') - \bar{Y}_n(t)))^r = \mathbf{E}(aZ(t) + b(Z(t') - Z(t)))^r \quad (3.12)$$

zu zeigen. Dazu verwenden wir (3.11). Die dabei auftretenden Erwartungswerte werden unter Ausnützung von Eigenschaften der Poissonvariablen abgeschätzt. Für $0 \leq t < t' = 1$ berechnen wir die Dichten explizit. Die Straffheit zeigen wir mittels Satz 1.2.17. 

Beweis: Mit den obigen Bezeichnungen gilt

$$\mathbf{P}_n(\alpha_1 = a_1, \dots, \alpha_n = a_n) = \begin{cases} \frac{n!}{n^n} \prod_{k=1}^n \binom{m_k}{k!}^{a_k} \frac{1}{a_k!} & \text{falls } \sum_{k=1}^n k a_k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$m_k = (k-1)! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k^i}{i!}.$$

Weiters sei ν eine Zufallsvariable auf Ω_z mit $\nu(a_1, a_2, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k$. Diese Summe ist \mathbf{P}_z -f.s. endlich:

Lemma 3.2.1 Für $0 < z < 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbf{P}_z(\nu = n) = \left(\frac{z}{e}\right)^n \frac{n^n}{n!} \frac{1}{S(z/e)}$$

mit $S(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m^m/m!)(x)^m$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_z(u^\nu) &= \prod_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_z(u^{k a_k}) = \prod_{k=1}^{\infty} \exp \left[(u^k - 1) \frac{m_k}{k!} \left(\frac{z}{e}\right)^k \right] \\ &= \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{k!} \left(\left(\frac{uz}{e}\right)^k - \left(\frac{z}{e}\right)^k \right) \right] = S\left(\frac{uz}{e}\right) / S\left(\frac{z}{e}\right). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{k!} \left(\frac{z}{e}\right)^k = \ln S(z/e). \quad (3.13)$$

$S(x)$ ist die exponentiell erzeugende Funktion der Anzahl der Abbildungen der Menge $\{1, \dots, k\}$ auf sich selbst. $A(x) := \sum_{r=1}^{\infty} (m_r/r!)x^r$ ist die exponentiell erzeugende Funktion der zusammenhängenden Abbildungen von $\{1, \dots, r\}$ auf sich selbst. Jede Abbildung ist eine Multimenge von zusammenhängenden Abbildungen und daher folgt $\exp(A(x)) = S(x)$ mit Satz 2.1.2. Daher ist weiters

$$\mathbf{P}_z(\nu = n) = [u^n] \mathbf{E}_z(u^\nu) = \left(\frac{z}{e}\right)^n \frac{n^n}{n!} \frac{1}{S(z/e)}.$$



Daraus folgt mit (3.13) leicht

$$\mathbf{P}_z((a_1, a_2, \dots) | \nu = n) = \mathbf{P}_n(\alpha_1 = a_1, \dots, \alpha_n = a_n),$$

und daher gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_z(\Psi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_z(\nu = n) \mathbf{E}_z(\Psi | \nu = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_z(\nu = n) \mathbf{E}_n(\Psi_n) + \mathbf{P}_z(\nu = 0) \Psi(0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \left(\frac{z}{e}\right)^n \frac{\mathbf{E}_n(\Psi_n)}{S(z/e)} + \frac{\Psi(0)}{S(z/e)}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\mathbf{E}_n(\Psi_n) = [z^n] \frac{e^n n!}{n^n} S(z/e) \mathbf{E}_z(\Psi).$$

Um nun unsere Behauptung zu zeigen, sei \bar{Y}_n wie oben. Dabei wählen wir $z_n \in (0, 1)$ so, dass

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{m_k e^{-k}}{k!} (z_n^k - 1) \right| < 1.$$

Daher gilt für alle $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=1}^{n^t} \frac{m_k}{k!} \left(\frac{z_n}{e}\right)^k - \frac{t}{2} \ln n \right| &\leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{m_k e^{-k}}{k!} (z_n^k - 1) \right| + \sum_{k=1}^n \left| \frac{m_k e^{-k}}{k!} - \frac{1}{2k} \right| + \left| \sum_{k=1}^{n^t} \frac{1}{2k} - \frac{t}{2} \ln n \right| \\ &\leq 2 + \sum_{k=1}^n \left| \frac{m_k e^{-k}}{k!} - \frac{1}{2k} \right|.\end{aligned}$$

Um die rechte Seite abzuschätzen, bemerken wir zunächst, dass

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{k^j e^{-k}}{j!} = \mathbf{P}(U_1 + \dots + U_k \leq k - 1),$$

wobei die U_i unabhängige und identisch verteilte Poissonvariablen mit Parameter 1 sind. Mit dem Satz von Berry-Esseen folgt

$$\left| \frac{m_k e^{-k}}{k!} - \frac{1}{2k} \right| = \frac{1}{k} \left| \sum_{j=0}^{k-1} \frac{k^j e^{-k}}{j!} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{8}{k^{3/2}}.$$

Daher gilt nun

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\phi \in \Omega_n} \rho(Y_n(\cdot, \phi), \bar{Y}_n(\cdot, \phi)) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\phi \in \Omega_n} \sup_{t \in [0, 1]} |Y_n(t, \phi) - \bar{Y}_n(t, \phi)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 1]} \frac{|\sum_{k=1}^{n^t} (m_k/k!) (z_n/e)^k - (t/2) \ln n|}{\sqrt{(1/2) \ln n}} = 0.\end{aligned}$$

Es reicht also die Konvergenz von \bar{Y}_n zu zeigen.

Wenden wir uns nun der Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen zu und unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: Für $0 \leq t < t' < 1$ zeigen wir (3.12). Sei r nun beliebig, aber fest gewählt und seien

$$\mu_n(z) = \sum_{k=1}^{n^t} \frac{m_k}{k!} \left(\frac{z}{e}\right)^k \quad \text{und} \quad \tilde{\mu}_n(z) = \sum_{k > n^t}^{n^{t'}} \frac{m_k}{k!} \left(\frac{z}{e}\right)^k.$$

Nach (3.11) gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n(a\bar{Y}_n(t) + b(\bar{Y}_n(t') - \bar{Y}_n(t)))^r &= [(z_n)^n] \frac{n!e^n}{n^n} S\left(\frac{z_n}{e}\right) \mathbf{E}_{z_n}(a\bar{Y}_n(t) + b(\bar{Y}_n(t') - \bar{Y}_n(t)))^r \\ &= [(z_n)^n] \frac{n!e^n}{n^n} S\left(\frac{z_n}{e}\right) \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} a^k b^{r-k} \mathbf{E}_{z_n}(\bar{Y}_n(t))^k \mathbf{E}_{z_n}(\bar{Y}_n(t') - \bar{Y}_n(t))^{r-k}, \end{aligned}$$

da wegen

$$\bar{Y}_n(t) = \sum_{j>0}^{n^t} \frac{a_j - \mu_n(z_n)}{\sqrt{(1/2) \ln n}} \quad \text{und} \quad \bar{Y}_n(t') - \bar{Y}_n(t) = \sum_{j>n^t}^{n^{t'}} \frac{a_j - \tilde{\mu}_n(z_n)}{\sqrt{(1/2) \ln n}}$$

$\bar{Y}_n(t)$ und $\bar{Y}_n(t') - \bar{Y}_n(t)$ unabhängig bezüglich \mathbf{P}_{z_n} auf Ω_z sind.

Nach Definition sind $\sum_{j>0}^{n^t} a_j$ und $\sum_{j<n^t}^{n^{t'}} a_j$ unabhängige Poissonvariablen mit Parametern $\mu_n(z_n)$ und $\tilde{\mu}_n(z_n)$. Da für eine Poissonvariable V mit Parameter λ und $m \in \mathbb{N}$ $\mathbf{E}(V - \lambda)^m = f_m(\lambda)$ ist, wobei f_m ein Polynom von höchstens Grad m ist, gilt

$$\mathbf{E}_n(a\bar{Y}_n(t) + b(\bar{Y}_n(t') - \bar{Y}_n(t)))^r = \frac{[(z_n)^n] n!e^n}{(\frac{1}{2} \ln n)^{r/2} n^n} S\left(\frac{z_n}{e}\right) L_n(z_n)$$

mit

$$L_n(z) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} a^k b^{r-k} f_k(\mu_n(z)) f_{r-k}(\tilde{\mu}_n(z)).$$

L_n ist ein Polynom von höchstens Grad $\sum_{k=0}^r (kn^t + (r-k)n^{t'})$. Daher gibt es für n hinreichend groß ein $0 < T < 1$, sodass der Grad von L_n kleiner als n^T ist. Schreiben wir $L_n(z) = \sum_{j=0}^{d_n} b_{j,n} z^j$, wobei d_n der Grad von L_n ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n(a\bar{Y}_n(t) + b(\bar{Y}_n(t') - \bar{Y}_n(t)))^r &= \frac{1}{(\frac{1}{2} \ln n)^{r/2}} \sum_{j=0}^{d_n} b_{j,n} \frac{(n-j)^{n-j} e^j n!}{(n-j)! n^n} \\ &= \frac{L_n(1)}{(\frac{1}{2} \ln n)^{r/2}} + \frac{1}{(\frac{1}{2} \ln n)^{r/2}} \sum_{j=0}^{d_n} b_{j,n} \left(\frac{(n-j)^{n-j} e^j n!}{(n-j)! n^n} - 1 \right) \\ &= E + F. \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass der zweite Term auf der rechten Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht: Mittels der Stirling-Formel folgt für $0 \leq j \leq d_n < n^T$

$$\frac{(n-j)^{n-j} e^j n!}{(n-j)! n^n} - 1 \leq \sqrt{\frac{n}{n-n^T}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \leq \frac{n}{n-n^T} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \leq \frac{3}{n^{1-T} - 1}.$$

Gilt $\sum_{j=0}^{d_n} |b_{j,n}| = O((\ln n)^r)$, so ergibt sich

$$|F| \leq \frac{3}{(n^{1-T} - 1) (\frac{1}{2} \ln n)^{r/2}} \sum_{j=0}^{d_n} |b_{j,n}| = O\left(\frac{(\ln n)^{r/2}}{n^{1-T}}\right).$$

Um nun $\sum_{j=0}^{d_n} |b_{j,n}| = O((\ln n)^r)$ zu zeigen, definieren wir ein Polynom $\hat{L}_n(z) = \sum_{j=0}^{d_n} \hat{b}_{j,n} z^j$ mit den Eigenschaften

- (i) die Koeffizienten von \hat{L}_n sind positiv,
- (ii) $\hat{d}_n \geq d_n$ und
- (iii) $|b_{j,n}| \leq \hat{b}_{j,n}$ für $0 \leq j \leq d_n$.

Dann gilt $\sum_{j=0}^{d_n} |b_{j,n}| = O((\ln n)^r)$, falls $\hat{L}_n(1) = O((\ln n)^r)$. Insbesondere definieren wir

$$\hat{L}_n(z) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} |a|^j |b|^{r-j} \hat{f}_j(\mu_n(z)) \hat{f}_{r-j}(\tilde{\mu}_n(z)),$$

wobei \hat{f}_i auf f_i entsteht, indem alle Koeffizienten durch ihre Absolutbeträge ersetzt werden. Da auch die Koeffizienten von μ_n und $\tilde{\mu}_n$ alle positiv sind, ist (i) erfüllt. Da der Grad von f_i gleich dem Grad von \hat{f}_i ist, gilt auch (ii). Für $0 \leq j \leq d_n$ kann $b_{j,n}$ geschrieben werden als ein Polynom in a, b und den Koeffizienten von f_i, μ_n und $\tilde{\mu}_n$. $\hat{b}_{j,n}$ ist durch das gleiche Polynom gegeben, wobei die Variablen durch ihre Absolutbeträge ersetzt worden sind. Daher gilt (iii) nach der Dreiecksungleichung.

Da $\mu_n(1) \sim (t/2) \ln n$ und $\tilde{\mu}_n(1) \sim ((t' - t)/2) \ln n$, folgt

$$\hat{L}_n(1) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} |a|^j |b|^{r-j} O((\ln n)^j) O((\ln n)^{r-j}) = O((\ln n)^r).$$

Also geht F gegen 0 und daher gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_n(a\bar{Y}_n(t) + b(\bar{Y}_n(t') - \bar{Y}_n(t)))^r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(1)}{(\frac{1}{2} \ln n)^{r/2}}.$$

Nach Definition von f_i ist

$$\begin{aligned} \frac{L_n(1)}{(\frac{1}{2} \ln n)^{r/2}} &= \frac{1}{(\frac{1}{2} \ln n)^{r/2}} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} a^k b^{r-k} \mathbf{E}(V_n - \mu_n(1))^k \mathbf{E}(\tilde{V}_n - \tilde{\mu}_n(1))^{r-k} \\ &= \mathbf{E} \left(a \frac{V_n - \mu_n(1)}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln n}} + b \frac{\tilde{V}_n - \tilde{\mu}_n(1)}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln n}} \right)^r, \end{aligned}$$

wobei V_n und \tilde{V}_n unabhängige Poissonvariablen mit Parametern $\mu_n(1)$ und $\tilde{\mu}_n(1)$ sind. Die normierten Variablen $(V_n - \mu_n(1))/\sqrt{\mu_n(1)}$ und $(\tilde{V}_n - \tilde{\mu}_n(1))/\sqrt{\tilde{\mu}_n(1)}$ konvergieren jeweils gegen die Standardnormalverteilung. Daher konvergiert der Vektor

$$\left(\sqrt{\frac{\mu_n(1)}{\frac{1}{2} \ln n}} \frac{V_n - \mu_n(1)}{\sqrt{\mu_n(1)}}, \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_n(1)}{\frac{1}{2} \ln n}} \frac{\tilde{V}_n - \mu_n(1)}{\sqrt{\tilde{\mu}_n(1)}} \right)$$

gegen den Vektor $(Z(t), Z(t' - t))$. Daraus folgt (3.12).

2. Fall: Für $0 \leq t < t' = 1$ zeigen wir für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\bar{Y}_n(t) \leq a, \bar{Y}_n(1) - \bar{Y}_n(t) \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^a e^{-u^2/2t} du \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-t)}} \int_{-\infty}^b e^{-u^2/2(1-t)} du.$$

Für $0 < \epsilon < \min(1/2, 1 - t)$, $n > 0$ gelten

$$P_n(\bar{Y}_n(t) \leq a, \bar{Y}_n(1) - \bar{Y}_n(t) \leq b) \leq P_n(\bar{Y}_n(t) \leq a, \bar{Y}_n(1 - \epsilon) - \bar{Y}_n(t) \leq b + \sqrt[4]{\epsilon}) \\ + P_n(|\bar{Y}_n(1) - \bar{Y}_n(1 - \epsilon)| \geq \sqrt[4]{\epsilon})$$

$$P_n(\bar{Y}_n(t) \leq a, \bar{Y}_n(1) - \bar{Y}_n(t) \leq b) \geq P_n(\bar{Y}_n(t) \leq a, \bar{Y}_n(1 - \epsilon) - \bar{Y}_n(t) \leq b - \sqrt[4]{\epsilon}) \\ - P_n(|\bar{Y}_n(1) - \bar{Y}_n(1 - \epsilon)| \geq \sqrt[4]{\epsilon}).$$

Um die zweiten Terme abzuschätzen, verwenden wir die Ungleichung von Chebyshev:

$$P_n(|\bar{Y}_n(1) - \bar{Y}_n(1 - \epsilon)| \geq \sqrt[4]{\epsilon}) \leq \frac{\mathbf{E}_n(\bar{Y}_n(1) - \bar{Y}_n(1 - \epsilon))^2}{\sqrt{\epsilon}}.$$

Nun definieren wir γ_n^ϵ auf Ω_{z_n} durch $\gamma : n^\epsilon(a_1, a_2, \dots) = \sum_{k > n^{1-\epsilon}}^n a_k$. Erweitern wir $\bar{Y}_n(1) - \bar{Y}_n(1 - \epsilon)$ zu einer Funktion auf Ω_{z_n} , so gilt $\bar{Y}_n(1) - \bar{Y}_n(1 - \epsilon) = (\gamma_n^\epsilon - \mu_n^\epsilon(z_n)) / \sqrt{(1/2) \ln n}$ mit $\mu_n^\epsilon(z) = \sum_{k > n^{1-\epsilon}}^n (m_k/k!)(z/e)^k$. Damit folgt ((3.11))

$$\mathbf{E}_n(\bar{Y}_n(1) - \bar{Y}_n(1 - \epsilon))^2 = [(z_n)^n] \frac{n!e^n}{n^n \ln n} \mu_n^\epsilon(z_n) S\left(\frac{z_n}{e}\right),$$

da γ_n^ϵ eine Poissonvariable auf Ω_{z_n} bezüglich P_{z_n} mit Parameter $\mu_n^\epsilon(z_n)$ ist. Mittels der Stirling Formel und $(m_k/k!)e^{-k} \leq 1/k$ erhalten wir

$$[(z_n)^n] \frac{n!e^n}{n^n \ln n} \mu_n^\epsilon(z_n) S\left(\frac{z_n}{e}\right) = \frac{2n!}{n^n \ln n} \sum_{k > n^{1-\epsilon}}^n \frac{m_k (n-k)^{n-k}}{k! (n-k)!} \\ \leq \frac{2}{\ln n} \sum_{k > n^{1-\epsilon}}^{n-1} \frac{2}{k} \sqrt{\frac{n}{n-k}} + \frac{4\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n \ln n}} \\ \leq \frac{4}{\ln n} \left[2 \sum_{k > n^{1-\epsilon}}^{3n/4} \frac{1}{k} + \frac{4}{3} \sum_{k > 3n/4}^{n-1} \frac{1}{n\sqrt{1-k/n}} + \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \right] \\ \leq \frac{4}{\ln n} \left[2\epsilon \ln n + \frac{4}{3} \int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \right] \leq 5\epsilon$$

für hinreichend großes n . Daher ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(|\bar{Y}_n(1) - \bar{Y}_n(1 - \epsilon)| \geq \sqrt[4]{\epsilon}) \leq 5\sqrt{\epsilon}$. Damit folgt unter Berücksichtigung des 1. Falls

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(\bar{Y}_n(t) \leq a, \bar{Y}_n(1) - \bar{Y}_n(t) \leq b) \\ \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^a e^{-u^2/2t} du \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\epsilon-t)}} \int_{-\infty}^b e^{-u^2/2(1-\epsilon-t)} du + 5\sqrt{\epsilon}$$

und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(\bar{Y}_n(t) \leq a, \bar{Y}_n(1) - \bar{Y}_n(t) \leq b) \\ \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^a e^{-u^2/2t} du \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\epsilon-t)}} \int_{-\infty}^b e^{-u^2/2(1-\epsilon-t)} du - 5\sqrt{\epsilon}$$

Lassen wir nun ϵ gegen 0 gehen, so erhalten wir das gewünschte Resultat.

Um die Straffheit zu beweisen, reicht es nach Satz 1.2.17, die Abschätzung

$$\mathbf{E}_n (\bar{Y}_n(t) - \bar{Y}_n(t_1))^2 (\bar{Y}_n(t_2) - \bar{Y}_n(t))^2 \leq 640(t_2 - t_1)^{3/2}$$

für $n \in \mathbb{Z}^+$ und $0 \leq t_1 < t < t_2 \leq 1$ zu zeigen. Dies lässt sich mit ähnlichen Ideen wie beim 2. Fall zeigen ([28]). ☞

3.2.2 Strata

Ein anderes Merkmal einer Abbildung $\phi \in \Omega_n$ sind ihre Strata: Jede Komponente des Graphen G_ϕ enthält genau einen Zyklus der Länge ≥ 1 . Jeder Knoten in diesem Zyklus ist die Wurzel eines markiertes Baums. Für jeden Knoten $x \in G_\phi$ existiert daher ein eindeutig bestimmter Pfad zum nächsten Knoten im Zyklus. Die Länge dieses Pfades wird der Abstand des Knoten x zum Zyklus genannt. Die Menge aller Punkte mit Abstand r von einem Zyklus heißt das r -te Stratum von ϕ . Sei $L_n(r) = L_n(r, \phi)$ die Anzahl der Knoten im r -ten Stratum von ϕ .

Beispiel 3.2.2 *In unserem Beispiel haben wir fünf zyklische Punkte, $L_{15}(1) = 5$, $L_{15}(2) = 3$ und $L_{15}(3) = 2$.*

Für ein $t \notin \mathbb{N}$ sei

$$L_n(t) = (\lfloor t \rfloor + 1 - t)L_n(\lfloor t \rfloor) + (t - \lfloor t \rfloor)L_n(\lfloor t \rfloor + 1).$$

Drmotá and Gittenberger [17] zeigten, dass der skalierte Prozess

$$l_n(t) = \frac{L_n(t\sqrt{n})}{\sqrt{n}}, \quad t \in [0, 1],$$

schwach in $C[0, \infty)$ gegen die lokale Zeit $l(t)$ der reflektierten Brown'schen Brücke $|B^{0,1,0}|$ konvergiert:

$$l_n(t) \xrightarrow{w} \frac{1}{2} l\left(\frac{t}{2}\right).$$

Dies kann mit erzeugenden Funktionen ähnlich zum Profil zufälliger Bäume (Drmotá und Gittenberger [16]) gezeigt werden: Der Graph G_ϕ ist aus markierten Wurzelbäumen, sogenannten *Cayleybäumen*, aufgebaut. Die Menge Φ der Graphen lässt sich schreiben als

$$\Phi = \text{multiset}(\text{cycle}(\mathcal{A})), \quad (3.14)$$

wobei \mathcal{A} die Menge aller Cayleybäume ist. Die exponentiell erzeugende Funktion $a(z)$ der Cayleybäume erfüllt die Gleichung $a(z) = ze^{a(z)}$, da $\mathcal{A} = \circ \times \text{multiset}(\mathcal{A})$. Um nun die Knoten im k -ten Stratum zu zählen, markieren wir die Knoten in dieser Ebene. Dies erfolgt analog zu Beispiel 2.1.4, wir müssen nur $\varphi_j = 1/j!$ setzen. Mit (3.14) - der gleiche Aufbau gilt natürlich auch für die Bäume mit den markierten Knoten - erhalten wir daher

$$b_k(z, u) = \sum_{n, m \geq 0} b_{nm, k} u^m \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{1 - a_k(z, u)},$$

wobei $b_{nm, k}$ die Anzahl der n -Abbildungen mit m Knoten im k -ten Stratum ist und $a_k(z, u)$ wie in Beispiel 2.1.4 ist mit $\varphi(z) = e^z$. Daher verläuft der Beweis sehr ähnlich wie dem des Profilprozesses; auch die Integraldarstellungen der endlichdimensionalen Verteilungen weisen Ähnlichkeiten auf.

3.2.3 Kontur

Die Kontur einer zufälligen Abbildung ϕ ist der Prozess, der aus den Tiefen der Knoten bei der Traversierung des zugehörigen Graphen G_ϕ entsteht. Dabei erweitern wir G_ϕ um eine Wurzel, an die alle zyklischen Punkte angehängt werden. Dabei müssen wir aber die Komponenten des Graphen durch Markierungen voneinander trennen. Weiters beginnen wir bei der Preorder-Durchmusterung einer Komponente bei jenem zyklischen Knoten, der auf den zyklischen Knoten, an dem der bisher kleinste nichtdurchlaufene Knoten hängt, folgt.

Beispiel 3.2.3 Sei ϕ die Abbildung aus Beispiel 3.2.1. Die erste Komponente beginnen wir bei 4 zu durchlaufen, die zweite bei 7. Die Kontur ist in Abbildung 3.7 dargestellt. Die erste Komponente läuft von g_0 bis g_1 , die zweite von g_1 bis g_2 .

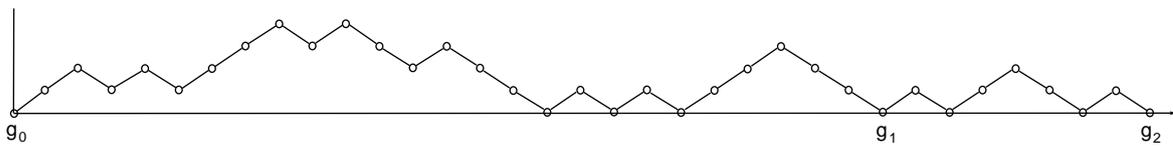


Abbildung 3.7: Die Kontur zur Abbildung aus Beispiel 3.2.1

Aldous und Pitman [3] zeigten die Konvergenz des Konturprozesses gegen die reflektierte Brown'sche Brücke. Dabei stützen sie sich darauf, dass der Kontur-Prozess jeder Komponente einzeln betrachtet gegen die Brown'sche Exkursion konvergiert. Anschliessend wird gezeigt, dass der Gesamtprozess mit der reflektierten Brown'sche Brücke übereinstimmt.

Anstelle der uniformen Verteilung auf Ω_n können wir auch andere Verteilungen betrachten: Sei $\mathbf{P} = (p_1, \dots, p_k)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\{1, \dots, n\}$, und die Wahrscheinlichkeit einer Abbildung ϕ sei $\prod_{i=1}^n p_{\phi(i)}$. Aldous, Miermont und Pitman [2] zeigten die Konvergenz der Kontur solcher Abbildungen gegen die reflektierte Brown'sche Brücke. Der Beweis stützt sich auf Konvergenzresultate für Prozesse von zufälligen Bäumen gegen die Brown'sche Exkursion und einer Erweiterung der Joyal-Bijektion zwischen Bäumen und Abbildungen zu einer Transformation zwischen den entsprechenden Prozessen (siehe [2]).

3.3 Zufällige Partitionen einer Menge

Sei Ω_n die Menge aller Partitionen einer endlichen n -elementigen Menge, versehen mit der uniformen Verteilung. Dann können wir folgende Zufallsvariablen betrachten: X_{ns} , die Anzahl der Blöcke der Größe s einer Partition. Ausgehend davon können wir einen Prozess $Y_n(t)$, $t \in [0, 1]$,

$$Y_n(t) = \sum_{s=0}^{k_n(t)} X_{ns}$$

definieren mit

$$k_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t = 0 \\ \lceil r + y(t)\sqrt{r} \rceil & \text{falls } 0 < t < 1 \\ n & \text{falls } t = 1 \end{cases}$$

wobei $y(t)$ das t -Quantil der Standardnormalverteilung und r eine einfache Wurzel der Gleichung $re^r = n$ ist (siehe [12]). DeLaurentis und Pittel [12] zeigten, dass der zentrierte und normierte Prozess $Z_n(t)$,

$$Z_n(t) = \left(Y_n(t) - \sum_{s=0}^{k_n(t)} b_{ns} \right) / \sqrt{\sum_{s=0}^n b_{ns}}, \quad b_{ns} = r^s / s!,$$

in Bezug auf die endlichdimensionalen Verteilungen gegen die Brown'sche Brücke $B^{0,1,0}$ konvergiert.

Beweisidee: Um die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen zu zeigen, zeigen wir die Konvergenz der entsprechenden momentenerzeugenden Funktionen. Der erste Schritt des Beweises besteht in der Berechnung von

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(\mathbf{x}) T_m \frac{t^m}{m!},$$

wobei $T_m = |\Omega_m|$ die m -te Bellzahl und $f_m(\mathbf{x})$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

$$f_m(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \left(\prod_{i=1}^k x_j^{\Delta Y_{mj}} \right)$$

des Vektors

$$(\Delta Y_{mj})_{j=1}^k = \left(\sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} X_{ms} \right)_{j=1}^k$$

mit $k \geq 1$, $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_k$ fest gewählt ist. Es gibt zwar keine geeignete Form für $f_m(\mathbf{x})$, jedoch lässt sich zeigen

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(\mathbf{x}) T_m \frac{t^m}{m!} = \exp \left[\sum_{j=1}^k (x_j - 1) \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{t^s}{s!} + e^t - 1 \right].$$

und daher folgt

$$f_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi i} \frac{m!}{T_m} \oint \exp \left[\sum_{j=1}^k (x_j - 1) \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{z^s}{s!} + (e^z - 1) \right] \cdot \frac{dz}{z^{m+1}}.$$

Dieses Integral wird mit der Sattelpunktmethode berechnet. Setzen wir dann $x_j = e^{u_j}$ für passende u_j , so erhalten wir daraus die momentenerzeugende Funktion und wir können die Konvergenz zeigen. ☞

Beweis: Um $\sum_{m=0}^{\infty} f_m(\mathbf{x}) T_m \frac{t^m}{m!}$ zu berechnen, benötigen wir die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

$$g_m(\mathbf{y}) = \mathbf{E} \left(\prod_{s=1}^l y_s^{X_{ms}} \right)$$

mit $i_s \in \mathbb{N}$, $s = 1, \dots, l$. Es gibt zwar keine geeignete Form für $g_m(\mathbf{y})$, doch es gilt (siehe auch Sachkov [36])

Lemma 3.3.1

$$\sum_{m=0}^{\infty} g_m(\mathbf{y}) T_m \frac{t^m}{m!} = \exp \left[\sum_{s=1}^l (y_s - 1) \frac{t^{i_s}}{i_s!} + e^t - 1 \right]$$

Beweis: Um dieses Lemma zu beweisen, verwenden wir ein allgemeineres Setting und erhalten es als Spezialfall: Sei $A \subseteq \mathbb{N}^+$ und $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots)$, $\Lambda_j \subseteq \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \dots$. Eine Partition einer m -elementigen Menge heißt A - $\mathbf{\Lambda}$ -Partition, falls die Größen der Blöcke der Partition zu A gehören und für die Anzahl β_j der Blöcke der Größe j $\beta_j \in \Lambda_j$ gilt. Falls $j \notin \mathbf{\Lambda}$, setzen wir $\Lambda_j = \{0\}$. Bezeichne $T_m(\beta_1, \dots, \beta_m; A, \mathbf{\Lambda})$ die Anzahl der A - $\mathbf{\Lambda}$ -Partitionen mit β_j Blöcken der Größe j . Ein einfaches Abzählargument liefert

$$T_m(\beta_1, \dots, \beta_m; A, \mathbf{\Lambda}) = \begin{cases} \frac{m!}{\prod_{j=1}^m \beta_j! (j!)^{\beta_j}} & \text{falls } \beta_j \in \Lambda_j \forall j, \sum_{j=1}^m j\beta_j = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der *Indikator* von A - $\mathbf{\Lambda}$ -Partitionen ist definiert als die blockzählende erzeugende Funktion, also durch

$$C(x_1, \dots, x_m; A, \mathbf{\Lambda}) = \sum_{\sum_j j\beta_j = m} T_m(\beta_1, \dots, \beta_m; A, \mathbf{\Lambda}) x_1^{\beta_1} \cdots x_m^{\beta_m}. \quad (3.15)$$

Der *Numerator* von A - $\mathbf{\Lambda}$ -Partitionen ist die erzeugende Funktion, die auch die Gesamtgröße der Partitionen zählt:

$$F(t; x_1, x_2, \dots; A, \mathbf{\Lambda}) = \sum_m C(x_1, \dots, x_m; A, \mathbf{\Lambda}) \frac{t^m}{m!}.$$

Aus (3.15) folgt daher

$$F(t; x_1, x_2, \dots; A, \mathbf{\Lambda}) = \prod_{j \in A} \sum_{\beta_j \in \Lambda_j} \left(\frac{x_j t^j}{j!} \right)^{\beta_j} \frac{1}{\beta_j!}.$$

Seien nun A und $\mathbf{\Lambda}$ fest gewählt, und die Menge der A - $\mathbf{\Lambda}$ -Partitionen sei mit der Gleichverteilung versehen. Jeder Block der Größe k , $k = 1, 2, \dots$ einer zufälligen A - $\mathbf{\Lambda}$ -Partition werde unabhängig von anderen Blöcken mit Wahrscheinlichkeit p_k markiert. Betrachten wir nun den stochastischen Vektor $\mathbf{C}_m(A, \mathbf{\Lambda}) = (C_1, \dots, C_m)$, wobei C_k die Anzahl der markierten Blöcke der Größe k ist. Mit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$ folgt

$$\mathbf{P}(\mathbf{C}_m(A, \mathbf{\Lambda}) = \mathbf{k}) = \frac{1}{T_m(A, \mathbf{\Lambda})} \sum_{\sum_j j\beta_j = m} T_m(\beta_1, \dots, \beta_m; A, \mathbf{\Lambda}) \prod_{i=1}^m \binom{\beta_i}{k_i} p_i^{k_i} (1 - p_i)^{\beta_i - k_i},$$

wobei $T_m(A, \mathbf{\Lambda})$ die Anzahl aller A - $\mathbf{\Lambda}$ -Partitionen einer m -elementigen Menge ist. Für die erzeugende Funktion $f(x_1, \dots, x_m; A, \mathbf{\Lambda})$ gilt

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_m; A, \mathbf{\Lambda}) &= \sum_{k_1=0}^m \cdots \sum_{k_m=0}^m \mathbf{P}(\mathbf{C}_m(A, \mathbf{\Lambda}) = \mathbf{k}) x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m} \\ &= \frac{1}{T_m(A, \mathbf{\Lambda})} C(p_1 x_1 + (1 - p_1), \dots, p_m x_m + (1 - p_m); A, \mathbf{\Lambda}). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_m(A, \Lambda) f(x_1, \dots, x_m; A, \Lambda) \frac{t^m}{m!} = \prod_{j \in A} \sum_{\beta_j \in \Lambda_j} \left((p_j x_j + (1 - p_j)) \frac{t^j}{j!} \right)^{\beta_j} \frac{1}{\beta_j!}.$$

Setzen wir nun $A = \mathbb{N}^+$ und $\Lambda_j = \mathbb{N}$ für $j = 1, 2, \dots$ und $p_j = 1$ falls $j \in \{i_1, \dots, i_s\}$ und $p_j = 0$ sonst, so folgt daraus unmittelbar die Behauptung. \square

Setzen wir $l = n_k$ und

$$y_s = x_j \quad \text{für} \quad n_{j-1} + 1 \leq s \leq n_j, \quad 1 \leq s \leq n_k$$

so gilt $f_m(\mathbf{x}) = g_m(\mathbf{y})$, und es folgt

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(x) T_m \frac{t^m}{m!} = \exp \left[\sum_{j=1}^k (x_j - 1) \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{t^s}{s!} + e^t - 1 \right].$$

Daraus können wir $f_m(\mathbf{x})$ mittels der Integralformel von Cauchy berechnen:

$$f_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi i} \frac{m!}{T_m} \oint \exp \left[\sum_{j=1}^k (x_j - 1) \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{z^s}{s!} + (e^z - 1) \right] \cdot \frac{dz}{z^{m+1}} \quad (3.16)$$

Betrachten wir nun den Prozess $Y_m(t)$, $t \in [0, 1]$. Seien $0 = t_0 < t_1 \dots < t_k \leq 1$ fest gewählt und $n_j = k_m(t_j)$, $0 \leq j \leq k$. Dann ist die erzeugende Funktion des Vektors $(\Delta Y_m(t_j))_{j=1}^k$ (3.16). Dieses Integral werden wir mithilfe der Sattelpunktmethode berechnen. Wählen wir als Integrationsweg einen Kreis mit Radius R , so folgt mit $z = Re^{i\varphi}$

$$f_m(\mathbf{x}) = \frac{m!}{2\pi T_m R^m} \exp \left[e^R - 1 + \sum_{j=1}^k (x_j - 1) \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{R^s}{s!} \right] \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \exp [F(i\varphi, R, \mathbf{x})] d\varphi \quad (3.17)$$

mit

$$F(i\varphi, R, \mathbf{x}) = e^{Re^{i\varphi}} - e^R + \sum_{j=1}^k (x_j - 1) \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{R^s}{s!} (e^{is\varphi} - 1) - im\varphi.$$

Um R geeignet zu wählen, entwickeln wir zunächst F :

$$F(i\varphi, R, \mathbf{x}) = F(0, R, \mathbf{x}) + i\varphi F'(0, R, \mathbf{x}) - \frac{1}{2} \varphi^2 F''(0, R, \mathbf{x}) + O(|F'''(i, \tilde{\varphi}, R, \mathbf{x})| |\varphi|^3)$$

mit $\tilde{\varphi} = O(|\varphi|)$. Explizit ergibt sich (da $F(0, R, \mathbf{x}) = 0$)

$$F(i\varphi, R, \mathbf{x}) = \left(Re^R + \sum_{j=1}^k (x_j - 1) \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{sR^s}{s!} - m \right) i\varphi - \frac{1}{2} \varphi^2 \alpha(\mathbf{x}, R) + \sigma(R, \varphi) \quad (3.18)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{x}, R) &= (R^2 + R)e^R + \sum_{j=1}^k (x_j - 1) \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{s^2 R^s}{s!}, \\ \sigma(R, \varphi) &= O \left(|\varphi|^3 \left(\sum_{s=0}^m \frac{s^3 R^s}{s!} + R^3 e^R \right) \right) = O(|\varphi|^3 R^3 e^R). \end{aligned}$$

Wegen (3.18) wählen wir R als positive Wurzel von

$$m = Re^R + \sum_{j=1}^k (x_j - 1) \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{sR^s}{s!}. \quad (3.19)$$

Dadurch wird (3.18) zu

$$F(i\varphi, R, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\varphi^2\alpha(\mathbf{x}, R) + O(|\varphi|^3 R^3 e^R). \quad (3.20)$$

Für $a \in \mathbb{R}^m$ sei $\|a\|$ die Maximumsnorm von a . Weiters setzen wir

$$\beta(\mathbf{x}, y) = e^{-y} \sum_{j=1}^k (x_j - 1) \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{y^s}{s!} \quad \gamma(u, y) = e^{-y} \sum_{s=0}^u \frac{y^s}{s!}. \quad (3.21)$$

Außerdem nehmen wir im weiteren an, dass für $m \rightarrow \infty$ gilt:

$$\|\mathbf{x} - 1\| = O(e^{-r/2}). \quad (3.22)$$

Für den weiteren Beweis benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 3.3.2 *Für $m \rightarrow \infty$ gelten*

- (i) $\Delta = R - r = O(e^{-r/2})$,
- (ii) $\gamma(k_m(t) + a, r) \rightarrow t$ für $a \in \mathbb{Z}$,
- (iii) $R^s/s! = r^s/s! + o(e^{r/2})$ gleichmäßig für $s \geq 0$,
- (iv) $\Delta = -r(r+1)^{-1}(\beta(\mathbf{x}, r) - \frac{1}{2}\beta(\mathbf{x}, r)^2) + o(e^{-r})$.

Beweis: (i), (iii) und (iv) können auf analytischem Wege gezeigt werden ([12]). Für (ii) führen wir eine Poissonvariable η mit Parameter r ein. $(\eta - r)/\sqrt{r}$ konvergiert in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung. Für $t \in (0, 1)$ gilt

$$\begin{aligned} \gamma(k_m(t) + a, r) &= e^{-r} \sum_{s=0}^{k_m(t)+a} \frac{r^s}{s!} = \mathbf{P}(\eta \leq k_m(t) + a) \\ &= \mathbf{P}((\eta - r)/\sqrt{r} \leq (k_m(t) + a - r)/\sqrt{r}) \\ &= \mathbf{P}((\eta - r)/\sqrt{r} \leq y(t)(1 + o(1))). \end{aligned}$$

Daher folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma(k_m(t) + a, r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}((\eta - r)/\sqrt{r} \leq y(t)(1 + o(1))) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y(t)} e^{-u^2/2} du = t.$$

Ebenso können die Fälle $t = 0, 1$ behandelt werden. ☞

Nun schätzen wir das Integral aus (3.17) ab. Dazu teilen wir es in $\varphi \in [-\epsilon, \epsilon]$ und $\varphi \in [-\epsilon, \epsilon]^C$ auf, die Integral bezeichnen wir mit J_1 und J_2 . Dabei ist $\epsilon = \epsilon(R)$, welches wir noch wählen werden. Wenden wir uns zunächst J_1 zu: Wegen (3.22) gilt

$$\alpha(\mathbf{x}, R) = R^2 e^R (1 + o(1)) \quad (3.23)$$

und wegen $re^r = m$ und Lemma 3.3.2 (i)

$$\alpha(\mathbf{x}, R) = mr(1 + o(1)), \quad m \rightarrow \infty. \quad (3.24)$$

Setzen wir in J_1 $v = \sqrt{\alpha}\varphi$ folgt wegen (3.20)

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\epsilon\sqrt{\alpha}}^{\epsilon\sqrt{\alpha}} \exp\left[-\frac{1}{2}v^2(1 + O(R\epsilon))\right] dv.$$

Daher wählen wir $\epsilon = R^{-1-\delta}$, $\delta > 0$ und wir erhalten, da $\epsilon\sqrt{\alpha} \rightarrow \infty$ ((3.23)) und wegen (3.24)

$$J_1 = \sqrt{2\pi/(mr)}(1 + o(1)). \quad (3.25)$$

Gehen wir nun zu J_2 . Mit c bezeichnen wir Konstanten, deren Wert nicht von Bedeutung ist.

$$\begin{aligned} |\exp[F(i\varphi, R, \mathbf{x})]| &\leq \exp\left[e^{R\cos\varphi} - e^R + 2\sum_{j=1}^k |x_j - 1| \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{R^s}{s!}\right] \\ &\leq \exp\left[e^R(e^{-cR\varphi^2} - 1) + 2\|x - 1\| \sum_{s=1}^{n_k} \frac{R^s}{s!}\right] \\ &\leq \exp[-ce^R\epsilon^2 + 2\|x - 1\|e^R] \\ &\leq \exp[-ce^{R/2}] \leq \exp[-ce^{r/2}]. \end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung gilt wegen $\cos x \leq 1 - cx^2$ für $x \in [-\pi, \pi]$, die letzte wegen Lemma 3.3.2 (i). Damit folgt nun

$$|J_2| = O\left(\exp[-ce^{r/2}]\right)$$

und mit (3.25) $J_2 = o(J_1)$ für $m \rightarrow \infty$. Daher haben wir insgesamt

$$J_1 + J_2 = \sqrt{2\pi/(mr)}(1 + o(1)).$$

Daraus ergibt sich mit der Asymptotik für die Bellzahlen

$$T_m = \frac{1}{\sqrt{r}} \exp\left[m\left(r - 1 + \frac{1}{r}\right) - 1\right] (1 + o(1))$$

und der Stirlingformel für $m!$

$$f_m(\mathbf{x}) = \exp[\psi(\mathbf{x}, r)] (1 + o(1)),$$

mit

$$\psi(\mathbf{x}, r) = m \ln(r/R) + e^R - m/r + \sum_{j=1}^k (x_j - 1) \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{R^s}{s!}.$$

Mit (3.19) können wir e^R eliminieren und erhalten

$$\psi(x, r) = m \ln(r/R) + m \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) + \sum_{j=1}^k (x_j - 1) \left(\frac{R^{n_j}}{n_j!} - \frac{R^{n_{j-1}}}{n_{j-1}!}\right) + o(1).$$

Wegen Lemma 3.3.2 (iii) und (3.22) gilt

$$\sum_{j=1}^k (x_j - 1) \left(\frac{R^{n_j}}{n_j!} - \frac{R^{n_{j-1}}}{n_{j-1}!} \right) = \sum_{j=1}^k (x_j - 1) \left(\frac{r^{n_j}}{n_j!} - \frac{r^{n_{j-1}}}{n_{j-1}!} \right).$$

Aus Lemma 3.3.2 (i) folgen für $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} m \ln(r/R) &= -m \ln(1 + \Delta/r) = -m\Delta/r + o(1), \\ m(1/R - 1/r) &= -m(\Delta/r^2)(1 + \Delta/r)^{-1} = -m\Delta/r^2 + o(1). \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich mit Lemma 3.3.2 (iv) für $m \rightarrow \infty$

$$m \ln(r/R) + m(1/R - 1/r) = -m\Delta(r+1)/r^2 + o(1) = e^r (\beta(\mathbf{x}, r) - \frac{1}{2}\beta(\mathbf{x}, r)^2) + o(1).$$

Damit ist

$$\psi(\mathbf{x}, r) = e^r \left[\beta(\mathbf{x}, r) + e^{-r} \sum_{j=1}^k (x_j - 1) \left(\frac{r^{n_j}}{n_j!} - \frac{r^{n_{j-1}}}{n_{j-1}!} \right) - \frac{1}{2}\beta(\mathbf{x}, r)^2 \right] + o(1).$$

Mit (3.21) erhalten wir nun insgesamt

$$f_m(\mathbf{x}) = \exp \left[\sum_{j=1}^k (x_j - 1) \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{r^s}{s!} - \frac{1}{2}e^r \beta(\mathbf{x}, r)^2 \right] (1 + o(1)).$$

Da wir daraus die momentenerzeugende Funktion erhalten wollen, fahren wir fort, indem wir zunächst $x_j = \exp(u_j)$, $u_j = O(e^{-r/2})$, $1 \leq j \leq k$ setzen. Mit $e^u - 1 = u + \frac{1}{2}u^2 + O(|u|^3)$ folgt

$$\begin{aligned} f_m(\mathbf{x}) &= \mathbf{E} \left(\exp \left[\sum_{j=1}^k u_j \Delta Y^{(m)}(t_j) \right] \right) \\ &= \exp \left[\sum_{j=1}^k u_j \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{r^s}{s!} \right] \exp [\Phi(\mathbf{u}, r)] (1 + O(\|\mathbf{u}\|^3 e^r) + o(1)) \end{aligned}$$

mit

$$\Phi(\mathbf{u}, r) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^k u_j^2 \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{r^s}{s!} \right) - \frac{1}{2}e^r \left(e^{-r} \sum_{j=1}^k u_j \left(\sum_{s=n_{j-1}}^{n_j-1} \frac{r^s}{s!} \right) \right)^2.$$

Da $\|\mathbf{u}\| = O(e^{-r/2})$, folgt

$$\mathbf{E} \left(\exp \left[\sum_{j=1}^k u_j \left(\Delta Y^{(m)}(t_j) - \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{r^s}{s!} \right) \right] \right) = \exp [\Phi(\mathbf{u}, r)] (1 + o(1)).$$

Wähle nun w_j , $1 \leq j \leq k$ fest und setze

$$u_j = w_j / \sqrt{\sum_{s=0}^m r^s / s!} = w_j / \sqrt{e^r \gamma(m, r)}.$$

Da nach Lemma 3.3.2 (ii) $\gamma(m, r) \rightarrow 1$ gilt, ist $u_j = O(e^{-r/2})$. Mit diesem Lemma erhalten wir auch für $m \rightarrow \infty$

$$\sum_{j=1}^k u_j^2 \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{r^s}{s!} = \frac{e^r}{e^r \gamma(m, r)} \left(\sum_{j=1}^k w_j^2 (\gamma(n_j, r) - \gamma(n_{j-1}, r)) \right) \rightarrow \left(\sum_{j=1}^k w_j^2 (t_j - t_{j-1}) \right).$$

Ebenso

$$e^r \left(e^{-r} \sum_{j=1}^k u_j \sum_{s=n_{j-1}}^{n_j-1} \frac{r^s}{s!} \right)^2 \rightarrow \left(\sum_{j=1}^k w_j (t_j - t_{j-1}) \right)^2.$$

Daraus ergibt sich nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} (\exp [\mathbf{w}, \Delta \mathbf{Z}_m]) = \exp \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^k w_j^2 (t_j - t_{j-1}) - \left(\sum_{j=1}^k w_j (t_j - t_{j-1}) \right)^2 \right) \right].$$

$$\Delta \mathbf{Z}_m = \left(\left(\Delta Y_m(t_j) - \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} b_{ms} \right) / \sqrt{\sum_{s=0}^m b_{ms}} \right)_{j=1}^k, \quad b_{ms} = r^s / s!$$



Pittel [34] bewies später mittels Poissonapproximation folgenden funktionalen Grenzwertsatz:

Satz 3.3.1 Seien

$$k(t) = \begin{cases} \lfloor r + y(t)\sqrt{r} \rfloor & \text{falls } t \in (0, 1/2] \\ \lceil r + y(t)\sqrt{r} \rceil & \text{falls } t \in (1/2, 1) \end{cases}$$

und $\phi(x, t)$ stetig auf $D := \mathbb{R} \times (0, 1)$ mit

$$\phi(x, t) = O \left(\frac{|x|^\kappa}{t^\alpha (1-t)} \right)$$

für ein $\kappa > 0$ und $\alpha < \kappa/2$. Weiters sei (ϵ_n) eine Nullfolge mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{-\kappa} \log \epsilon_n^{-1} = 0.$$

Dann gilt für den Prozess

$$Z_n(t) = \frac{\sum_{k \leq k(t)} X_{nk} - \sum_{k \leq k(t)} (r^k / k!)}{e^{r/2}}$$

$$\int_0^{1-\epsilon_n} \phi(Z_n(t), t) dt \xrightarrow{w} \int_0^1 \phi(B^{0,1,0}(t), t) dt.$$

Beweisidee: Seien r die Lösung der Gleichung $re^r = n$, Z_j Poissonvariablen mit Parameter $r^j/j!$, und X_j die Anzahl der Teilmengen der Größe j in einer zufälligen Partition. Zuerst zeigt Pittel, dass die Distanz der totalen Variation zwischen $(X_j)_{j \leq j_1}$ und $(Z_j)_{j \leq j_1}$ und zwischen $(X_j)_{j \geq j_2}$ und $(Z_j)_{j \geq j_2}$ gegen 0 geht, falls $r^{-1/2}(r - j_1) \rightarrow \infty$ bzw. $r^{-1/2}(j_2 - r) \rightarrow \infty$. Daraus erhält er Abschätzungen für $X(j) = \sum_{k \leq j} X_k$. Damit und mit dem obigen Ergebnis zeigt er schließlich die Behauptung.



3.4 Zufällige Permutationen

Betrachte die Menge S_n der Permutationen auf der Menge $\{1, \dots, n\}$, versehen mit der Gleichverteilung. $X_{ns} = X_{ns}(\sigma)$ sei die Anzahl der Zyklen der Länge s in der zufälligen Permutation σ . DeLaurentis und Pittel [13] untersuchten die gemeinsame Verteilung von X_{n1}, \dots, X_{nn} : Für $t \in [0, 1]$ sei

$$X_n(t) = \sum_{1 \leq s \leq n^t} X_{ns}, \quad Y_n(t) = (X_n(t) - t \ln n) / \sqrt{\ln n}.$$

Dann konvergiert die Folge der Prozesse Y_n schwach gegen die Standard-Brown'sche Bewegung in $D[0, 1]$.

Beweisidee: Anstelle des Prozesses $Y_n(t)$ betrachten wir den Prozess

$$Y_n^*(t) = \left(\sum_{1 \leq s \leq n^t} \left(X_{ns} - \frac{1}{s} \right) \right) / \sqrt{\ln n}.$$

Dies ist zulässig, da $\sum_{1 \leq s \leq \nu} 1/s - \ln \nu = o(1)$. Der Beweis für die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen verläuft ähnlich wie der für die Partitionen einer Menge: Nach [36], [13] können die momentenerzeugenden Funktionen des Vektors

$$(\mathcal{X}_{n_j})_{j=1}^k = \left(\sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} X_{ns} \right)_{j=1}^k$$

mit $n_j = \lfloor n^{t_j} \rfloor$ für $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$ dargestellt werden als

$$M(\mathbf{u}) = \mathbf{E} \left(\exp \left[\sum_{j=1}^k u_j \mathcal{X}_{n_j} \right] \right) = [z^n] \frac{1}{1-z} \exp \left[\sum_{j=1}^k (e^{u_j} - 1) \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \frac{z^s}{s} \right].$$

Diese Koeffizienten werden mittels Cauchyscher Integralformel und der Sattelpunktmethode berechnet. Für die Straffheit bemerken wir zunächst, dass für $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

$$- \left(\sum_{1+n^{t_1} \leq s \leq n^{t_4}} \frac{1}{s} \right) / \sqrt{\ln n} \leq Y_n^*(t_3) - Y_n^*(t_2) \leq Y_n^*(t_4) - Y_n^*(t_1) + \left(\sum_{1+n^{t_1} \leq s \leq n^{t_4}} \frac{1}{s} \right) / \sqrt{\ln n}$$

gilt. Es reicht deswegen - analog zu Bemerkung 1.2.4 - eine Abschätzung der Gestalt

$$\mathbf{E} \left((Y_n^*(t+h) - Y_n^*(t))^4 \right) \leq ch^2 \quad \text{für } h \geq (\ln n)^{-1} \quad (3.26)$$

zu zeigen. Der Beweis dafür beruht auf der Schranke

$$\mathbf{E} \left((C_n - \mathbf{E}(C_n))^4 \right) \leq 15\mathbf{E}^2(C_n) + 13\mathbf{E}(C_n), \quad (3.27)$$

mit $C_n = \sum_{s=r_1}^{r_2} X_{ns}$, $1 \leq r_1 \leq r_2$, welche mithilfe von Abschätzungen für die faktoriellen Momente hergeleitet wird. 

Beweis der Straffheit: Wir zeigen (3.26) konkret für

$$\mathbf{E} \left((Y_n^*(t+h) - Y_n^*(t))^4 \right) \leq 174h^2 \quad \text{für } h \geq (\ln n)^{-1}.$$

Seien $1 \leq r_1 \leq r_2$ fix gewählt und C_n wie oben. Wir werden (3.27) zeigen mit

$$\mathbf{E}(C_n) = \sum_{r_1 \leq s \leq r_2} \frac{1}{s}.$$

Daraus folgt bereits die Behauptung:

$$Y_n^*(t+h) - Y_n^*(t) = \left(\sum_{s=[n^t]+1}^{[n^{t+h}]} (X_{ns} - 1/s) \right) / \sqrt{\ln n} = (C_n - \mathbf{E}(C_n)) / \sqrt{\ln n}$$

mit $r_1 = [n^t] + 1$, $r_2 = [n^{t+h}]$. Wegen

$$\left| \sum_{s=r_1+1}^{r_2} 1/s - (\ln r_2 - \ln r_1) \right| \leq 1$$

$$|(\ln r_2 - \ln r_1) - h \ln n| \leq 1$$

ist

$$\mathbf{E}(C_n) = \sum_{[n^t]+1}^{[n^{t+h}]} \frac{1}{s} \leq h \ln n + 2 = \ln n (h + 2(\ln n)^{-1}) \leq 3h \ln n$$

für $h \geq (\ln n)^{-1}$. Daher folgt

$$\mathbf{E}((Y_n^*(t+h) - Y_n^*(t))^4) \leq (135h^2 \ln^2 n + 39h \ln n) / \ln^2 n = 135h^2 + 39h(\ln n)^{-1} \leq 174h^2.$$

Um nun (3.27) zu beweisen halten wir fest:

$$\sum_{n \geq 0} t^n \mathbf{E}(y^{C_n}) = \exp \left[\sum_{s=r_1}^{r_2} (y-1) \frac{t^s}{s} \right] / (1-t)$$

(für eine Herleitung siehe [13]). Mit (2.1) folgt

$$\sum_{n \geq 0} t^n m_n^{(j)} = \left(\sum_{s=r_1}^{r_2} \frac{t^s}{s} \right)^j / (1-t), \quad (3.28)$$

wobei $m_n^{(j)}$ das j -te faktorielle Moment von C_n ist. Koeffizientenvergleich von t ergibt

$$m_n^{(j)} = \sum_{s_1 + \dots + s_j \leq n} \prod_{v=1}^j \frac{1}{s_v}; \quad (3.29)$$

hier und im folgenden gilt auch $r_1 \leq s_v \leq r_2$. Daraus folgen

$$m_n^{(j)} \leq \left(m_n^{(1)} \right)^j = \mathbf{E}^j(C_n), \quad (3.30)$$

$$m_n^{(j_2)} \leq m_n^{(j_1)} \left(m_n^{(1)} \right)^{j_2 - j_1}, \quad j_2 \geq j_1 \geq 1. \quad (3.31)$$

Nun schreiben wir

$$\mathbf{E}((C_n - \mathbf{E}(C_n))^4) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$$

mit

$$E_1 = m_n^{(1)}, \quad E_2 = 7m_n^{(2)} - 4\left(m_n^{(1)}\right)^2, \quad (3.32)$$

$$E_3 = 6m_n^{(3)} - 12m_n^{(2)}m_n^{(1)} + 6\left(m_n^{(1)}\right)^3, \quad (3.33)$$

$$E_4 = m_n^{(4)} - 4m_n^{(3)}m_n^{(1)} + 6m_n^{(2)}\left(m_n^{(1)}\right)^2 - 3\left(m_n^{(1)}\right)^4. \quad (3.34)$$

Für E_2 erhalten wir mit (3.30), (3.32)

$$E_2 \leq 3\left(m_n^{(1)}\right)^2. \quad (3.35)$$

Für E_3 folgt aus (3.31), (3.33)

$$E_3 = 6\left(m_n^{(3)} - m_n^{(2)}m_n^{(1)}\right) + 6m_n^{(1)}\left(\left(m_n^{(1)}\right)^2 - m_n^{(2)}\right) \leq 6m_n^{(1)}\left(\left(m_n^{(1)}\right)^2 - m_n^{(2)}\right).$$

Weiters ist wegen (3.29)

$$\begin{aligned} \left(m_n^{(1)}\right)^2 - m_n^{(2)} &= \sum_{s_1 s_2} \frac{1}{s_1 s_2} - \sum_{s_1 + s_2 \leq n} \frac{1}{s_1 s_2} = \sum_{s_1 + s_2 > n} \frac{1}{s_1 s_2} = \sum_{s_1 + s_2 > n} \frac{1}{s_1 + s_2} \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}\right) \\ &\leq \frac{2}{n} \sum_{s_1 + s_2 \geq n} \frac{1}{s_1} \leq \frac{2}{n} \sum_s \frac{1}{s} \leq 2 \end{aligned}$$

und daher

$$E_3 \leq 12m_n^{(1)}. \quad (3.36)$$

Für E_4 erhalten wir mit (3.31) und (3.34)

$$\begin{aligned} E_4 &= \left(m_n^{(4)} - m_n^{(3)}m_n^{(1)}\right) + 3\left(m_n^{(1)}\right)^2\left(m_n^{(2)} - \left(m_n^{(1)}\right)^2\right) + 3m_n^{(1)}\left(m_n^{(2)}m_n^{(1)} - m_n^{(3)}\right) \\ &\leq 3m_n^{(1)}\left(m_n^{(2)}m_n^{(1)} - m_n^{(3)}\right) = 3m_n^{(1)} \sum \end{aligned}$$

mit (siehe (3.29))

$$\begin{aligned} \sum &= \sum_{s_1 + s_2 \leq n} \frac{1}{s_1 s_2 s_3} - \sum_{s_1 + s_2 + s_3 \leq n} \frac{1}{s_1 s_2 s_3} \\ &= \sum_{\substack{s_1 + s_2 \leq n \\ s_1 + s_2 + s_3 > n}} \frac{1}{s_1 + s_2 + s_3} \left(\frac{1}{s_1 s_2} + \frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_3}\right) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{\substack{s_1 + s_2 \leq n \\ s_1 + s_2 + s_3 > n}} \frac{1}{s_1 s_2} + \frac{2}{n} \sum_{\substack{s_1 + s_2 \leq n \\ s_1 + s_2 + s_3 > n}} \frac{1}{s_1 s_3} = \sum' + \sum''. \end{aligned}$$

In \sum' kann s_3 für jedes Paar (s_1, s_2) höchstens $s_1 + s_2$ Werte annehmen, und daher folgt

$$\sum' \leq \frac{1}{n} \sum_{s_1+s_2 \leq n} \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} = \frac{2}{n} \sum_{s_1+s_2 \leq n} \frac{1}{s_1} \leq \frac{2}{n} \sum_s \frac{n}{s} = 2m_n^{(1)}.$$

Ähnlich folgt

$$\sum'' \leq \frac{2}{n} \sum_{s_1 \leq n, s_3 \leq n} \frac{s_3}{s_1 s_3} = \frac{2}{n} \sum_s \frac{n}{s} = 2m_n^{(1)}$$

und damit insgesamt

$$E_4 \leq 12 \left(m_n^{(1)} \right)^2. \quad (3.37)$$

Mit (3.35), (3.36) und (3.37) erhalten wir nun (3.27). ☞

Bemerkung 3.4.1 Wir haben hier angenommen, dass alle Permutationen die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Man kann aber auch noch unter anderen Wahrscheinlichkeitsmaßen die Konvergenz gegen die Brown'sche Bewegung zeigen, für einen Zugang über die Poissonapproximation siehe Arratia und Tavaré [5].

3.5 Zufällige Matrizen

Sei $\Omega_n = GL_n(F_q)$ die Menge der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen über einem endlichen Körper F_q . X_{ns} sei die Zufallsvariable, die einer Matrix $A \in GL_n(F_q)$ mit charakteristischem Polynom p_A die Anzahl der irreduziblen Faktoren mit Grad s von p_A zuweist. $Y_{nt} = \sum_{1 \leq j \leq nt} X_{nj}$ sei die Anzahl der Faktoren mit Grad kleiner oder gleich n^t . Goh und Schmutz [25] zeigten, dass der Prozess

$$Z_n(t) = \frac{Y_n(t) - t \ln n}{\sqrt{\ln n}}, \quad t \in [0, 1],$$

gegen die Standard-Brown'sche Bewegung in $D[0, 1]$ konvergiert.

Beweisidee: Anstelle des Prozesses $Z_n(t)$ betrachten wir den Prozess $\hat{Z}_n(t)$, der aus $Z_n(t)$ entsteht, indem wir X_{nj} durch die Zufallsvariable \hat{X}_{nj} , die die Anzahl der unterschiedlichen Faktoren vom Grad j zählt, ersetzen. Für die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen seien wieder $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ fest gewählt und $n_j = \lfloor n^{t_j} \rfloor$. Weiters seien

$$S_{nj} := \sum_{s=n_{j-1}+1}^{n_j} \hat{X}_{ns}, \quad \bar{S}_{nj} = (t_j - t_{j-1}) \log n$$

und $\sigma_n = \sqrt{\log n}$. Es ist zu zeigen, dass der Vektor

$$\left(\frac{S_{nj} - \bar{S}_{nj}}{\sigma_n} \right)_{j=1}^k$$

gegen einen Gauß'schen Vektor mit Parametern $(0, t_j - t_{j-1})$ konvergiert. Nach Satz 1.2.8 reicht es zu zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\exp \left[\sum_{j=1}^k ia_j \left(\frac{S_{nj} - \bar{S}_{nj}}{\sigma_n} \right) \right] \right) = \exp \left[- \sum_{j=1}^k \frac{a_j^2}{2} (t_j - t_{j-1}) \right]$$

für beliebige $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ erfüllt ist. Über den Zyklenzeiger eines Vektorraums (siehe unten) ist es möglich zu zeigen

$$\mathbf{E} \left(\exp \left[\sum_{j=1}^k ia_j S_{nj} \right] \right) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{g_n(u)}{u^{n+1}(1-u)} du, \quad (3.38)$$

wobei $g_n(u)$ im Einheitskreis analytisch ist. Der Integrand wird nahe 1 approximiert, anschließend wird das Integral unter Benützung des Residuensatzes berechnet und abgeschätzt.

Für die Straffheit reicht auch hier eine Abschätzung der Art (3.26) zu zeigen, da

$$-\sqrt{n}(t_4 - t_1) \leq \hat{Z}_n(t_3) - \hat{Z}_n(t_2) \leq \hat{Z}_n(t_4) - \hat{Z}_n(t_1) + \sqrt{n}(t_4 - t_1)$$

für $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ gilt. ☞

Um die charakteristischen Funktionen (3.38) zu gewinnen, verwenden Goh und Schmutz Hilfsmittel aus der Linearen Algebra: Sei V ein Vektorraum. Jede Matrix A aus $GL_n(V)$ ist ähnlich zu einer Matrix in Frobenius-Normalform. Diese ist bestimmt durch die Zerlegung des charakteristischen Polynoms p_A in irreduzible Faktoren und die Struktur der entsprechenden Unterräume: Sei

$$p_A(x) = \prod_{i=1}^{k_A} p_i(x)^{j_i},$$

wobei die p_i irreduzibel und von Grad m_i seien. Dann zerfällt V in A -invariante Unterräume $U_i = \ker(p_i(A)^{j_i})$ mit Dimension $j_i m_i$. In diesen U_i gibt es Vektoren v_1, \dots, v_{r_i} , sodass

$$\left\{ v_1, Av_1, \dots, A^{d_1-1}v_1, \dots, v_{r_i}, Av_{r_i}, \dots, A^{d_{r_i}-1}v_{r_i} \right\}$$

eine Basis von U_i ist. Die Normalform ist daher durch die normierten irreduziblen Faktoren des charakteristischen Polynoms p_A und durch die entsprechende Partition von $m_i j_i$ durch die d_i bestimmt. Ist nun p ein normiertes irreduzibles Polynom b eine Partition, so sei $I_{p,b}(A)$ gleich 1, falls p ein Teiler von p_A und b die entsprechende Partition ist, andernfalls sei $I_{p,b} = 0$. Damit können wir nun den *Zyklenzeiger eines Vektorraums* definieren:

$$Z_n(q, \mathbf{x}) := \frac{1}{|GL_n(F_q)|} \sum_{A \in GL_n(F_q)} \prod_{p,b} x_{p,b}^{I_{p,b}(A)},$$

wobei das Produkt über alle normierten, irreduziblen Polynome und alle Partitionen läuft. Da die Koeffizienten eines Monoms genau die Anzahl der Matrizen einer Klasse sind, können wir $Z_n(q, \mathbf{x})$ als wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion auffassen. Setzen wir nun in $Z_n(q, \mathbf{x})$

$$x_{p,b} = e^{ia_d} \quad \text{falls } n_{d-1} < \text{Grad}(p) \leq n_d, \quad 1 \leq d \leq k,$$

und bezeichne $K_n(\mathbf{a})$ die daraus resultierende Funktion, so gelten

$$K_n(\mathbf{a}) = \mathbf{E} \left(\exp \left[\sum_{j=1}^k ia_j S_{nj} \right] \right)$$

und

$$\mathbf{E} \left(\exp \left[\sum_{j=1}^k ia_j \left(\frac{S_{nj} - \bar{S}_{nj}}{\sigma_n} \right) \right] \right) = \exp \left[- \sum_{j=1}^k \frac{ia_j \bar{S}_{nj}}{\sigma_n} \right] K_n(\mathbf{a}/\sigma_n).$$

Der Schlüssel liegt wieder darin, die Funktion

$$G_q(z) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(q, \mathbf{x}) z^n$$

zu betrachten, da nach der Substitution

$$x_{p,b} = e^{i a_d / \sigma^n} \quad \text{falls } n_{d-1} < \text{Grad}(p) \leq n_d, \quad 1 \leq d \leq k,$$

($\mathcal{G}_q(z, \mathbf{a})$ bezeichne die aus obiger Substitution gewonnene Funktion)

$$K_n(\mathbf{a}/\sigma_n) = [z^n] \mathcal{G}_q(z, \mathbf{a})$$

gilt. Für $G_q(z)$ haben wir nämlich folgende Identität (siehe Stong [37]):

Satz 3.5.1 *Formal gilt*

$$G_q(z) = \prod_p \left(1 + \sum_b \frac{x_{p,b} z^{|b| \text{Grad}(p)}}{c_{\text{Grad}(p)(b)}} \right),$$

wobei das Produkt über alle normierten, irreduziblen Polynome $p(x) \neq x$ verläuft und über alle Partitionen b summiert wird. Dabei bezeichnet für eine Partition b mit b_1 1ern, b_2 2ern usw. $|b| = \sum j b_j$ und

$$c_m(b) = \prod_{s \in \mathbb{N}} \prod_{k=1}^{b_s} \left(q^{m d_s} - q^{m(d_s - k)} \right) \quad \text{mit} \quad d_i = d_i(b) = \sum_{k=1}^{i-1} k b_k + i \sum_{k \geq i} b_k.$$

Damit ist es möglich zu zeigen, dass $\mathcal{G}_q(z, \mathbf{a})$ im offenen Einheitskreis analytisch ist, da mithilfe dieses Satzes eine im Einheitskreis analytische Funktion $g_n(z)$ gefunden werden kann, sodass

$$\mathcal{G}_q(z, \mathbf{a}) = \frac{g_n(z)}{1 - z}$$

gilt. Daraus folgt auch sofort (3.38). Um dieses Integral zu berechnen stellen wir $g_n(u) = e^{h_n(u)} e^{\Delta_n(u)}$ dar, wobei

$$h_n(u) = \sum_{d=1}^k z_d \sum_{m=n_{d-1}+1}^{n_d} \frac{u^m}{m}$$

und Δ_n analytisch für $|u| < (1 + \sqrt{2})/2 =: \rho$ ist, und $\Delta_n(u) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und gleichmäßig für $|u| < \rho$. Das Integral kann dann dargestellt werden als

$$e^{\Delta_n(1)} \left(-\text{Res} \left(\frac{e^{h_n(u)}}{u^{n+1}(1-u)}, u=1 \right) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\rho} \frac{e^{h_n(u)}}{u^{n+1}(1-u)} du \right) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\frac{1}{2}} \left(e^{\Delta_n(u)} - e^{\Delta_n(1)} \right) \frac{e^{h_n(u)}}{u^{n+1}(1-u)} du.$$

Nun ist aber das Residuum aber gleich $-e^{h_n(1)}$. Dieser Term liefert den gewünschten Grenzwert, und von den beiden Integralen kann man zeigen, dass sie vernachlässigbar klein sind.

Der Schlüssel für den Beweis der Straffheit ist wieder eine Abschätzung der Gestalt

$$\mathbf{E}((y_n(t+h) - Y_n(t))^4) \leq ch^2$$

für $h \geq 1/\log n$.

3.6 Urnenmodelle

Betrachten wir folgendes Setup: Wir haben m Urnen und wir werfen in diese Bälle entsprechend gewissen Regeln. Die Bälle werden einzeln und unabhängig voneinander geworfen. Interessiert sind wir an der Anzahl der Urnen an d Zeitpunkten mit gewissen Eigenschaften, z.B. mit einer vorgegebenen Anzahl an Bällen, oder, wenn wir Bällen mit zwei Farben werfen, mit einer vorgegebenen Differenz der beiden Ballsorten (siehe dazu [14]). Dazu führen wir für jede Urne U eine additive Bewertung $Y(U)$ ein und sei \mathcal{E} eine Teilmenge aller möglichen Werte von $Y(U)$. Wir sind dann interessiert an der Zufallsvariable X , die jene Urnen zählt, die $Y(U) \in \mathcal{E}$ erfüllen:

$$X = \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{\mathcal{E}}(Y(U_i)).$$

Die Würfe werden wir mittels erzeugender Funktionen beschreiben.

Beispiel 3.6.1 ([14]) *Die Urnen haben unbegrenztes Fassungsvermögen, und wir sind an den leeren Urnen interessiert, dh. $Y(U)$ ist die Anzahl der Bälle in U und $\mathcal{E} = \{0\}$. Da wir ununterscheidbare Bälle und unterscheidbare Urnen haben, verwenden wir erzeugende Funktionen, die exponentiell in Bezug auf die Bälle und gewöhnlich in Bezug auf die Urnen sind. Da es nur eine Möglichkeit gibt, n Bälle in m Urnen zu werfen, ist die erzeugte Funktion einer Urne $g(z) = e^z$, wobei z die Bälle markiert. Die erzeugende Funktion von m Urnen ist e^{mz} . Markieren wir die leeren Urnen mit x , so erhalten wir*

$$\Phi_1(x, z) = (e^z + x - 1)^m$$

und daher

$$\mathbf{P}(X_m(n) = k) = \frac{[x^k z^n] \Phi_1(x, z)}{[z^n] \Phi_1(1, z)}.$$

Dabei zählt $X_m(n)$ die Anzahl der leeren Urnen nach n Würfeln. Es ist dann

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X_m(n) &= m \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \sim me^{-\theta} \\ \text{Var}X_m(n) &= m(m-1) \left(1 - \frac{2}{m}\right)^n + m \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n - m^2 \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{2n} \\ &\sim me^{-\theta} (1 - (1 + \theta)e^{-\theta}), \end{aligned}$$

für $m \rightarrow \infty$ und $n/m \rightarrow \theta > 0$.

Die zweidimensionale erzeugende Funktion für $\mathbf{P}(X_m(n_1) = k_1, X_m(n_1 + n_2) = k_2)$ ist

$$\Phi_2(x_1, x_2, z_1, z_2) = ((e^{z_1} - 1)e^{z_2} + x_1(e^{z_2} - 1) + x_1x_2)^m.$$

Drmot, Gardy und Gittenberger [14] zeigten das allgemeine Resultat

Satz 3.6.1 *Sei $X_m(\lfloor mt \rfloor)$, $t \geq 0$ der Prozess des Bällewerfens in Urnen, sodass die entsprechende erzeugende Funktion die Gestalt*

$$\Phi_{\mathcal{E},d}(x_1, \dots, x_d, z_1, \dots, z_d) = \phi_{\mathcal{E},d}(x_1, \dots, x_d, z_1, \dots, z_d)^m$$

hat, wobei $\phi_{\mathcal{E},d}$ einer Rekursion der Form

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{E},d}(x_1, \dots, x_d, z_1, \dots, z_d) &= K_{d+1}(z_1, \dots, z_d) \\ &+ \sum_{l=1}^d x_l K_l(z_1, \dots, z_l) \sum_{r \in \mathcal{E}} \phi_{\mathcal{E}-r, d-l}(x_{l+1}, \dots, x_d, z_{l+1}, \dots, z_d) \end{aligned} \quad (3.39)$$

mit ganzen Funktionen K_i genügt. Dabei ist $\mathcal{E} - r := \{y : y + r \in \mathcal{E}\}$. Dann gilt

$$Y_m(t) := \frac{X_m(\lfloor mt \rfloor) - \mathbf{E}X_m(\lfloor mt \rfloor)}{\sqrt{m}} \xrightarrow{w} G(t),$$

wobei $G(t)$ eine zentrierter Gauß-Prozess mit stetigen Pfaden ist. Die Kovarianzfunktion $B_{s,t}$, $s, t \geq 0$, ist gegeben durch

$$B_{s,t} = B_{t,s} = \left. \frac{\partial^2 (\log \lambda_{s,t}(e^{u_1}, e^{u_2}))}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{u_1=0, u_2=0} \quad (3.40)$$

für $s < t$ und mit

$$\lambda_{s,t}(x_1, x_2) = \frac{\phi_{\mathcal{E},2}(x_1, x_2, \rho_1, \rho_2)}{\rho_1^s \rho_2^{t-s}},$$

wobei $\rho_1 = \rho_1(x_1, x_2, s, t)$ und $\rho_2 = \rho_2(x_1, x_2, s, t)$ die Sattelpunkte definiert durch

$$\begin{aligned} z_1 \partial \phi_{\mathcal{E},2} / \partial z_1 &= s \phi_{\mathcal{E},2} \\ z_2 \partial \phi_{\mathcal{E},2} / \partial z_2 &= (t-s) \phi_{\mathcal{E},2} \end{aligned}$$

sind.

$$B_{s,s} = \left. \frac{\partial^2 (\log \lambda_s(e^u))}{\partial^2 u} \right|_{u=0}$$

mit

$$\lambda_s(x) = \frac{\phi_{\mathcal{E},1}(x, \rho)}{\rho^s},$$

wobei $\rho = \rho(x, s)$ ist der Sattelpunkt gegeben durch

$$z \partial \phi_{\mathcal{E},1} / \partial z = s \phi_{\mathcal{E},1}.$$

Für die Varianzen gilt

$$\text{Var} X_m(n) \sim m \frac{f}{g} \left(1 - \frac{f}{g} \left(1 + \frac{sg'^2}{sgg'' - (s-1)g'^2} \left(1 - \frac{\rho f'}{sf} \right)^2 \right) \right),$$

wobei die Funktionen f , g und deren Ableitungen an der Stelle ρ ausgewertet werden mit ρ Lösung der Gleichung $zg'(z) = sg(z)$ mit $s = n/m$. $f(z)$ ist die erzeugende Funktion der Anordnungen der Bälle in einer Urne, und $g(z)$ ist die erzeugende Funktion der Anordnungen mit $Y \in \mathcal{E}$.

Beispiel 3.6.2 Im obigen Beispiel ist $g(z) = e^z$ und $f(z) \equiv 1$. Betrachten wir beschränkte Urnen mit Fassungsvermögen δ , so ist $g(z) = (1+z)^\delta$. Werfen wir zwei verschiedene Arten von Bällen, so ist $g(z) = e^{2z}$ für unbeschränkte Urnen bzw. $g(z) = (1+2z)^\delta$ für beschränkte. Für diese und weitere Beispiele siehe [14].

Das kann mittels erzeugender Funktionen gezeigt werden. Wir beschreiben zunächst, wie die Würfe mit erzeugenden Funktionen modelliert werden und geben anschließend die Beweisidee an ([14]).

Seien $f(z)$ und $g(z)$ wie oben, dann ist die Funktion $\Phi_{\mathcal{E},1}(x, z)$, die die Anordnung der Bälle in m Urnen beschreibt,

$$\Phi_{\mathcal{E},1}(x, z) = (g(z) + (x - 1)f(z))^m.$$

Für die mehrdimensionalen Verteilungen definieren wir $\phi_{\mathcal{E},d}(x_1, \dots, x_d; z_1, \dots, z_d)$ als die erzeugende Funktion der Anordnungen in einer Urne, wobei z_1, \dots, z_d die geworfenen Bälle vor der Zeit t_1 , dann zwischen t_1 und t_2 usw. und x_1, \dots, x_d die Urnen U mit $Y(U) \in \mathcal{E}$ zu den Zeiten t_1, \dots, t_d markieren. Die erzeugende Funktion für m Urnen ist dann $\Phi_{\mathcal{E},d} = \phi_{\mathcal{E},d}^m$.

Für $\phi_{\mathcal{E},d}$ stellen wir eine Rekursion wie folgt auf: Sei t_ℓ der erste Zeitpunkt, zu dem $Y(U) \in \mathcal{E}$ gilt, dh. $\ell = \min\{i : Y(U, t_i) \in \mathcal{E}\}$, wobei $Y(U, t_i)$ gleich $Y(U)$, ausgewertet zum Zeitpunkt t_i , ist. Die Anordnungen bis inklusive t_ℓ zählen wir mit einer Funktion $x_\ell K_\ell(z_1, \dots, z_\ell)$. Für $i > \ell$ definieren wir $Z_i(U) := Y(U, t_i) - Y(U, t_\ell)$. $Z_i(U)$ beschreibt also den Wert von Y , falls die Würfe von $t_{\ell+1}$ bis t_i in eine leere Urne durchgeführt worden wären. Sei weiters $Y(U, t_\ell) = r$ mit $r \in \mathcal{E}$ und $\mathcal{E} - r := \{y : y + r \in \mathcal{E}\}$. Dann gilt $Y(U, t_i) \in \mathcal{E}$ genau dann, wenn $Z_i(U) \in \mathcal{E} - r$ ist. Daher können wir die Würfe nach dem Zeitpunkt t_ℓ unter der Voraussetzung $Y(U, t_\ell) = r$ durch die Funktion $\phi_{\mathcal{E}-r,d-\ell}(x_{\ell+1}, \dots, x_d; z_{\ell+1}, \dots, z_d)$ beschreiben. Für den Fall, dass $Y(U, t_i) \notin \mathcal{E}$ für alle i ist, sei $K_{d+1}(z_1, \dots, z_d)$ die Funktion, die diese Anordnungen zählt. Damit erfüllt $\phi_{\mathcal{E},d}$ die Rekursion (3.39).

Beispiel 3.6.3 ([14]) *Für den Fall, dass $Y(U)$ die Bälle in einer Urne U zählt, ist*

$$K_\ell(z_1, \dots, z_\ell) = \sum_{n_1, \dots, n_\ell} \frac{z_1^{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{z_\ell^{n_\ell}}{n_\ell!},$$

wobei über alle n_1, \dots, n_ℓ summiert wird, für die $n_1 \notin \mathcal{E}, \dots, n_1 + \dots + n_{\ell-1} \notin \mathcal{E}$ und $n_1 + \dots + n_\ell \in \mathcal{E}$ gilt. Weiters ist

$$K_{d+1}(z_1, \dots, z_d) = \sum_{n_1, \dots, n_d} n_1 \cdots n_d \frac{z_1^{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{z_d^{n_d}}{n_d!},$$

wobei die Summe über alle n_1, \dots, n_d mit $n_1 \notin \mathcal{E}, \dots, n_1 + \dots + n_d \notin \mathcal{E}$ läuft.

Beweisidee: Aufgrund der Gestalt der erzeugenden Funktionen folgt die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen gegen zentrierte Normalverteilungen mit Kovarianzmatrizen (3.40) nach Bender und Richmond [9]. Die Existenz eines Gauß'schen Prozesses mit Kovarianzfunktion (3.40) ist durch Satz 1.1.2 gesichert. Für die Stetigkeit verwenden wir das Kriterium von Kolmogorov (Satz 1.1.1) und zeigen

$$\mathbf{E}(G(t) - G(t+s))^4 = \frac{1}{8}(B_{t,t} - 2B_{t,t+s} + B_{t+s,t+s})^2 = O(s^2).$$

Dazu berechnen wir uns zunächst $B_{t,t}$ aus $\Phi_{\mathcal{E},1}(x, r) = g(r) + (x - 1)f(r)$. Durch geeignete Darstellung der Funktion $\Phi_{\mathcal{E},2}(x_1, x_2, r_1, r_2)$ als Summe von vier erzeugenden Funktionen lässt sich $B_{t,t+s} = B_{t,t} + O(s)$ zeigen.

Der Beweis der Straffheit erfolgt mittels Satz 1.2.14. Der Schlüssel sind Abschätzungen

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_m(n) - \mathbf{E}X_m(n))^2 &\leq C_1 n \\ \mathbf{E}(X_m(n) - \mathbf{E}X_m(n))^4 &\leq C_2 n^2, \end{aligned}$$

welche unter Zuhilfenahme der faktoriellen Momente und der Sattelpunktmethode gezeigt werden können. 

Um aber beispielsweise die Größe von Datenbanken nach bestimmten Operationen und Modelle, bei denen auch Löschvorgänge erlaubt sind, zu beschreiben, ist dieser Zugang nicht ausreichend, da hier nur die Gesamtzahl an geworfenen Bällen bekannt ist, nicht aber die Zahl der einzelnen Typen von Bällen (siehe [15]):

Seien $T_1[X, Y]$ und $T_2[X, Z]$ zwei Tabellen mit zwei Spalten: Der Equijoin von T_1 und T_2 ist das kartesische Produkt $T_1 \times T_2$, eingeschränkt auf jene Quadrupel (x_1, y, x_2, z) mit $x_1 = x_2$, der Semijoin von T_1 mit T_2 sind jene Paare $(x, y) \in T_1$, für die es ein Paar $(x, z) \in T_2$ gibt. Dies lässt sich mit folgender Grundidee mit Urnen modellieren: Wir haben eine Folge von Urnen, markiert mit den möglichen Werten für X . Dann werfen wir ununterscheidbare Bälle der ersten Farbe für jedes Paar $(x, y) \in T_1$ in die entsprechende Urne x ; analog für T_2 mit Bällen der zweiten Farbe. Die Anzahl der Bälle der einzelnen Farben entspricht der Größe der beiden Tabellen. Mit Bällen einer dritten Farbe repräsentieren wir jedes Tupel des Equi- oder Semijoins. Die Anzahl dieser Bälle ist dann die gesuchte Größe.

Mathematisch lässt sich dieser Vorgang wie folgt beschreiben: Wir betrachten eine Folge von m Urnen, in die wir nacheinander und unabhängig Bälle unterschiedlicher Farbe werfen, die Bälle einer Farbe seien ununterscheidbar. Weiters sei f eine Bewertungsfunktion, die jeder Urne U , die k_i Bälle der Farbe $i, i = 1, 2, \dots, d$ enthält, einen Wert $f(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^+$ zuordnet (im Fall des Equijoins wäre $f(k_1, k_2) = k_1 k_2$, im Fall des Semijoins $f(k_1, k_2) = k_1 \mathbf{1}_{k_2 > 0}$). Bezeichnen wir mit K_{ij} die Anzahl der Bälle der Farbe i in der j -ten Urne, so sind wir in die Zufallsvariable

$$X_m = \sum_{j=1}^m f(K_{1j}, \dots, K_{dj})$$

unter der Bedingung $\sum_{j=1}^m K_{ij} = n_i$ interessiert. Drmota, Gardy und Gittenberger [15] zeigten mithilfe von erzeugenden Funktionen, dass der normierte Prozess $X_m = X_m(n_1, \dots, n_d)$ für $m \rightarrow \infty$, und falls $(n_1, \dots, n_d)/m$ gegen einen festen Vektor (t_1, \dots, t_d) geht, gegen ein Gauß'sches Feld konvergiert. (Ein stochastisches Feld ist ein Prozess mit Parameter $\mathbf{t} \in G \subseteq \mathbb{R}^d$.)

Literaturverzeichnis

- [1] Aldous D.: The continuum random tree II: An overview, in Stochastic Analysis, M.T. Barlow und N.H. Bingham, Hrsg., Cambridge University Press, Cambridge 1991, 23-70
- [2] Aldous D., Miermont G., Pitman J.: Brownian bridge asymptotics for random p-mappings, Electronic Journal of Probability 9 (2004), 37-56
- [3] Aldous D., Pitman J.: Brownian bridge asymptotics for random mappings, Random Structures and Algorithms 5 (1994), 487-512
- [4] Arratia R., Barbour A.D., Tavaré S.: Poisson process approximations for the Ewens Sampling Formula, Annals of Applied Probability 21 (1992), 519-535
- [5] Arratia R., Tavaré S.: Limit Theorems for Combinatorial Structures via Discrete Process Approximations, Random Structures and Algorithms 3/3 (1992), 321-345
- [6] Arratia R., Tavaré S.: Independent process approximation for random combinatorial structures, Advances in Mathematics 104 (1994), 90-154
- [7] Bauer H.: Wahrscheinlichkeitstheorie, Walter de Gruyter, Berlin - New York ⁴1991
- [8] Bauer H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, Walter de Gruyter, Berlin 1968
- [9] Bender E.A., Richmond L.B., Central and local limit theorems applied to asymptotic enumeration II: multivariate generating functions, Journal of Combinatorial Theory, Ser. A 34 (1983), 255-265
- [10] Billingsley P.: Convergence of Probability Measures, John Wiley, New York 1968
- [11] Borodin A.N., Salminen P.: Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae, Birkhäuser, Basel - Boston - Berlin 1996
- [12] DeLaurentis J.M., Pittel B.G.: Counting subsets of the random partition and the 'Brownian Bridge' process, Stochastic Processes and their Applications 15 (1983), 155-167
- [13] DeLaurentis J.M., Pittel B.G.: Random Permutations and Brownian Motion, Pacific Journal of Mathematics 119 (1985), 287-301
- [14] Drmota M., Gardy D., Gittenberger B.: A unified Presentation of some Urn Models, Algorithmica 29/1-2 (2001), 120-147
- [15] Drmota M., Gardy D., Gittenberger B.: General Urn Models with Several Types of Balls an Gaussian Limiting Fields, Random Structures and Algorithms 24 (2004), 75-103

-
- [16] Drmota M., Gittenberger B.: On the profile of Random trees, *Random Structures and Algorithms* 10/4 (1997), 421-451
- [17] Drmota M., Gittenberger B.: Strata of random mappings - A combinatorial approach, *Stochastic Processes and their Applications* 82 (1999), 157-171
- [18] Drmota M., Soria M.: Marking in combinatorial constructions: Generating functions and limiting distributions, *Theoretical Computer Science* 144 (1995), 67-99
- [19] Feller W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. 2, John Wiley, New York 1966
- [20] Flajolet P., Odlyzko A.: Singularity analysis of generating functions, *SIAM Journal of Discrete Mathematics* 3/2 (1990), 216-240
- [21] Flajolet P., Sedgewick R.: *Analytic Combinatorics*, preprint 23.10.2006, <http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/books.html>
- [22] Gittenberger B.: On the contour of random trees, *SIAM Journal of Discrete Mathematics* 12/4, 434-458
- [23] Gittenberger B.: Die Konvergenz spezieller stochastischer Prozesse gegen die Brownsche Exkursion und deren lokale Zeit, Dissertation, TU Wien 1995
- [24] Gihman I.I., Skorohod A.V.: *The Theory of Stochastic Processes I*, Springer, New York 1974
- [25] Goh W.M.Y., Schmutz E.: Random Matrices and Brownian Motion, *Combinatorics, Probability and Computing* 2 (1993), 157-180
- [26] Gurker W.: *Angewandte Statistik - Unterlagen zu Vorlesung und Übung*, TU Wien 2005
- [27] Gutjahr W., Pflug G.Ch.: The asymptotic contour process of a binary tree is a Brownian excursion, *Stochastic Processes and their Application* 41 (1992), 69 - 89
- [28] Hansen J.C.: A functional central limit theorem for random mappings, *The Annals of Probability* 17/1 (1989), 317-332
- [29] Hansen J.C.: Correction - A functional central limit theorem for random mappings, *The Annals of Probability* 19/3 (1991), 1393-1396
- [30] Hayman W.K.: A generalization of Stirling's formula, *Journal für reine und angewandte Mathematik* 196 (1956), 67-95
- [31] Karatzas I., Shreve S.E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, New York 1988
- [32] Mandlbürger, J.: Die multivariate Sattelpunktmethode und Anwendungen in der abzählenden Kombinatorik, Dissertation, TU Wien 2006
- [33] Marckert F., Mokkadem A.: The depth first processes of Galton-Watson Trees converge to the same brownian excursion, *The Annals of Probability* 31 (2003), 1655-1678
- [34] Pittel B.: Random Set Partitions: Asymptotics of Subset Counts, *Journal of Combinatorial Theory A* 79 (1997), 326-359

-
- [35] Revuz D., Yor M.: Continuous Martingales and Brownian Motion, Springer, Berlin Heidelberg 1991
- [36] Sachkov V.N.: Probabilistic Methods in Combinatorial Analysis, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 56, 1997
- [37] Stong, R.: Some asymptotic results on finite vector spaces, Advances in Applied mathematics 9 (1988), 167-199
- [38] Vitter J.S., Flajolet P.: Average-case analysis of algorithms and data structures, in Handbook of Theoretical Computer Science, Vol. A: Algorithms and Complexity, van Leeuwen J., Ed., Amsterdam 1990, 431-524