# Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik

## Zusätzliche Übungsaufgaben

**Z1)** Sei $n \in \mathbb{N}$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass für $f(x) = x^n$ gilt: $f'(x) = nx^{n-1}$. Bestimmen Sie ohne Zuhilfenahme dieses Resultats und ohne Verwendung der Exponentialfunktion die Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x^n$.

**Z2)** Untersuchen Sie, wo die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung. Ist die Funktion stetig differenzierbar?

**Z3)** Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x|x|$. Berechnen Sie $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

**Z4)** Sei $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Menge aller differenzierbaren Funktionen. Beweisen Sie, dass die Abbildung $D : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f \mapsto f'$ linear ist.

**Z5)** Die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ habe eine differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung von $f^{-1}$. Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Resultats die Ableitung von $\arcsin(x)$, wobei der Definitions- und Bildbereich der Sinusfunktion geeignet eingeschränkt werden muss.

**Z6)** Beweisen Sie die Quotientenregel für den Quotient von zwei differenzierbaren Funktionen.

**Z7)** Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = (x-1)^2 \cos x$ an der Anschlussstelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Bestimmen Sie weiters das zugehörige Taylorpolynom zweiter Ordnung samt Restglied und eine Abschätzung für das Restglied im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

**Z8)** Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{1-3x}$ an der Anschlussstelle $x_0 = 7$. Bestimmen Sie weiters das zugehörige Taylorpolynom zweiter Ordnung samt Restglied und eine Abschätzung für das Restglied im Intervall $[-4, 10]$.

**Z9)** Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = e^{2x}$ an der Anschlussstelle $x_0 = 3$. Bestimmen Sie weiters das zugehörige Taylorpolynom zweiter Ordnung samt Restglied und eine Abschätzung für das Restglied im Intervall $[-1, 7]$.

**Z10)** Die Produktionskosten einer Ware betragen $10000 + 260x - x^2$ zur Herstellung von $x$ Einheiten, wobei $0 \leq x \leq 100$.

Bestimmen Sie die lineare Näherung der Kostenfunktion in der Nähe von $x_0 = 60$ (Angabe der Gleichung!) und berechnen Sie damit näherungsweise die zusätzlichen Kosten, die bei Produktion einer weiteren Einheit anfallen. Vergleichen Sie diese Näherung mit den tatsächlichen Mehrkosten.

Ermitteln Sie weiters die mittleren Stückkosten, die bei der Produktion von $x$ Einheiten anfallen.

**Z11)** Ein Monopolist produziert eine Ware, wobei die Kosten in Abhängigkeit von der Stückzahl durch die Funktion $K(x) = 5000 + 100x + x^2$ beschrieben werden, der Umsatz durch $U(x) = 1000x - 2x^2$. Der Staat hebe eine Steuer $S(x) = 100x$ auf die Absatzmenge ein.

Maximieren Sie den Unternehmensgewinn. Berechnen Sie die Steuereinnahmen für den Staat bei gewinnmaximaler Absatzmenge.

Ermitteln Sie weiters jenen Steuersatz $r$ (also $S(x) = rx$), der dem Staat die maximalen Steuereinnahmen bringt, falls das Unternehmen wieder die gewinnmaximale Menge absetzt.

**Z12)** Ein Kapital $K = K(0)$ werde zum Zeitpunkt $t = 0$ Jahre mit kontinuierlicher Verzinsung mit Rate $r$ angelegt, d.h. nach einem Jahr beträgt der Wert $K(1) = K(0)r$.

Bestimmen Sie den Wert des Kapitals nach $t$ Jahren ($t \in \mathbb{R}$). Zeigen Sie, dass die Wachstumsrate des Kapitals proportional zu seinem Betrag ist und bestimmen Sie den Proportionalitätsfaktor.

Nähern Sie das Kapital in der Nähe des Zeitpunkts $t_0$ durch eine Gerade an und bestimmen Sie die Gleichung dieser Geraden.

**Z13)** Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $C \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass dann die folgenden Behauptungen gelten:

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{und} \quad \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

**Z14)** Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $y \in [a,b]$. Beweisen Sie, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^y f(x)\,dx + \int_y^b f(x)\,dx.$$

Beweisen Sie weiters die folgende Aussage:

$$\forall x \in [a,b]:\ f(x) \le g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

**Z15)** Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und es gelte für alle $x \in [a,b]$ die Ungleichung $f(x) \le g(x)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Zeigen Sie weiters die Ungleichungen

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \text{und} \quad \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\sup_{a\le x\le b} f(x)$$

**Z16)** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Beweisen Sie, dass dann auch $g$ integrierbar ist, wobei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$.

**Z17)** Sei $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Beweisen Sie mit Hilfe von Ober- bzw. Untersummen, dass die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\int_1^n \frac{dx}{x} \ge H_n - 1 \quad \text{und} \quad \int_1^n \frac{dx}{x} \le H_{n-1}.$$

Folgern Sie daraus, dass $a_n := H_n - \ln n$ für alle $n \ge 1$ im Einheitsintervall $[0,1]$ liegt und zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\ge 1}$ eine monoton fallende Folge ist.

**Z18)** Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodass die quadratische Form $-2x^2 - 2xy + 8xz - 2y^2 + 2ayz - 10z^2$ negativ definit ist.

**Z19)** Bestimmen Sie eine Abschätzung für den Verfahrensfehler, wenn man zur numerischen Berechnung der Ableitung deren Definition als Limes des Differenzenquotienten verwendet und infolgedessen den Differenzenquotienten zur Approximation der Ableitung heranzieht.