Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Berechnen Sie

$$\int \frac{6-2x}{(x-1)(x-2)}\,dx.$$

2)(8 P.) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren die stationären Punkte der Funktion $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ unter der Nebenbedingung $x + y = 3$.

3)(8 P.) Lösen Sie die lineare Rekursion

$$a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2} + 2^{n-1}$$

mit $a_0 = 2, a_1 = 3$.

4)(8 P.) Wie ist eine Kurve im $\mathbb{R}^3$ definiert? Was versteht man unter einem Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$? Was versteht man unter dem Kurvenintegral eines Vektorfelds längs einer solchen Kurve? Wann heißt so ein Kurvenintegral wegunabhängig? Geben Sie eine hinreichende Bedingung für Wegunabhängigkeit an.

5)(8 P.) Was versteht man unter einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung? Wie sieht die Lösungsgesamtheit einer inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung aus? Beschreiben Sie ein Verfahren zur Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung und illustrieren Sie dieses anhand eines Beispiels.

Wien, am 2. Juli 2007 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xe^{x^2+y^2}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = ye^{x^2+y^2}$.

a) Berechnen Sie $\frac{d}{du} f(\cos(u), \sin(u))$.

b) Untersuchen Sie, ob eine Funktion mit obiger Angabe existiert.

2)(8 P.) Untersuchen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums, ob die Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

konvergiert.

Hinweis: Das auftretende Integral kann mit Hilfe der Substitution $\ln x = u$ vereinfacht werden.

3)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Rekursion

$$a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 2^n + 3.$$

4)(8 P.) Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Wie sind die partiellen Ableitungen von f definiert? Wie sieht die Funktionalmatrix einer solchen Funktion konkret aus? Welche geometrische Bedeutung hat die Richtungsableitung von f bezüglich eines Vektors $\mathbf{v}$? Wie lautet die Richtungsableitung von $f(x,y,z) = x\sin(y)z^y$ bezüglich $(1,0,0)$?

5)(8 P.) Zur Numerik linearer Gleichungssysteme: Worin besteht der Nachteil des gewöhnlichen Gaußschen Eliminationsverfahrens? Welche Möglichkeit der Verbesserung gibt es? Wie funktioniert das Gesamtschrittverfahren von Jacobi? Illustrieren Sie dieses Verfahren anhand eines selbstgewählten 2×2-Gleichungssystems, indem Sie den ersten Schritt des Verfahrens vorführen.

Wien, am 12. Oktober 2007 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 7y' + 12y = e^x \sin x + e^{3x}.$$

2)(8 P.) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren denjenigen Punkt auf der Parabel $x^2 + y = 1$, der dem Ursprung am nächsten liegt.

3)(8 P.) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

4)(8 P.) Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Was versteht man unter dem unbestimmten Integral von f? Wie ist das bestimmte Integral von f über einem Intervall $[a, b]$ definiert? Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem unbestimmten und dem bestimmten Integral? Wie kann man das bestimmte Integral anschaulich interpretieren?

5)(8 P.) Wie hängen die Probleme Nullstellen- und Fixpunktbestimmung zusammen? Beschreiben Sie das Newtonverfahren (zugrunde liegende geometrische Überlegung, konkrete Rekursion). Konvergiert das Newtonverfahren immer? (Begründung!)

Wien, am 30. November 2007 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Berechnen Sie die folgende Summe durch Aufstellen und Lösen einer Rekursion.

$$\sum_{i=1}^{n} iq^i.$$

2)(8 P.) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion

$$G(x, y, z) = -3(2x^2 + 2y^2 + z^2) + 6xy + 8yz + 4x + 6y + 4z - 22.$$

Untersuchen Sie auch, ob es sich um Minima oder Maxima handelt?

3)(8 P.) Ein Teilchen bewegt sich so auf der Raumkurve

$$\mathbf{c} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9t \\ 12t \\ 10t^{3/2} \end{pmatrix},$$

daß es sich nach t Sekunden im Punkt $\mathbf{c}(t)$ (Koordinatenangaben in Metern) befindet. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Teilchens nach einer Sekunde und die Länge des in den ersten 3 Sekunden zurückgelegten Weges.

4)(8 P.) Beschreiben Sie die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren (Formulieren Sie die Problemstellung und die Lösungsmethode).

5)(8 P.) Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wann heißt f stetig an der Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$? Geben Sie zwei verschiedene Differenzierbarkeitsbegriffe für solche Funktionen an und beschreiben Sie diese. Wie hängen die beiden von Ihnen gewählten Differenzierbarkeitsbegriffe untereinander zusammen?

Wien, am 25. Jänner 2008 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) a) Führen Sie alle Schritte des Quicksort-Algorithmus für den folgenden Datensatz durch:

$$(3, 1, 8, 2, 7, 4, 6, 5)$$

b) Median-of-three ist eine Variante des Quicksort-Algorithmus, bei der nicht das letzte Element als Pivotelement verwendet wird, sondern es werden die letzten 3 Elemente der Liste betrachtet und das der Größe nach mittlere zur Pivotisierung verwendet. Worin liegt der Vorteil von Median-of-three gegenüber dem gewöhnlichen Quicksort-Algorithmus?

2)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-4x}$$

3)(8 P.) Sei B die durch die beiden Kurven $y = x^2$ und $y = \sqrt{x}$ begrenzte Fläche. Berechnen Sie das Integral

$$\iint_B (2 + 3x)\, dx\, dy.$$

4)(8 P.) Was versteht man unter einer ϵ-Umgebung im $\mathbb{R}^2$? Wann nennt man eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig? Was bedeutet total differenzierbar (anschauliche Erklärung)? Welche Eigenschaften von f lassen sich mit Hilfe der Jacobi- und der Hessematrix untersuchen?

5)(8 P.) Was versteht man unter einer Kurve im $\mathbb{R}^2$? Wann heißt so eine Kurve rektifizierbar? Nennen Sie eine nicht rektifizierbare Kurve. (Begründung der Nichtrektifizierbarkeit!) Wie kann man die Länge einer (rektifizierbaren) Kurve berechnen?

Wien, am 14. März 2008 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Untersuchen Sie, ob das Gauß-Seidel-Verfahren auf das folgende Gleichungssystem anwendbar ist (d.h. gegen die exakte Lösung konvergiert) und bestimmen Sie gegebenfalls die Näherungslösung, die man mit den Startwerten $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ nach zwei Schritten des Verfahrens erhält.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Die exakte Lösung lautet $x = \frac{13}{42}$, $y = \frac{19}{42}$, $z = \frac{31}{42}$.

2)(8 P.) Sei $f(x, y) = 5y^2e^{-x} + 2\cos(2x + y) + 4xy$. Zeigen Sie, daß $(0, 0)$ ein Sattelpunkt von f ist. Bestimmen Sie weiters die Taylorapproximation zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$. Skizzieren Sie die Funktion f in der Nähe von $(0, 0)$.

Anleitung zur Skizze: Approximieren Sie f durch das Taylorpolynom zweiter Ordnung und analysieren Sie dessen Niveaulinien für Niveaus $c > 0$, $c < 0$ bzw. $c = 0$.

3)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Rekursion $a_n - 7a_{n-1} + 12a_{n-2} = 2^n - 1$.

4)(8 P.) Wann nennt man eine Abbildung $f : [a, b] \to [a, b]$ kontrahierend? Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ differenzierbar. Warum folgt aus $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in [a, b]$, daß f eine Kontraktion ist? Welche zwei wichtigen Eigenschaften, die Grundlage für viele numerische Verfahren ist, besitzen Kontraktionen?

5)(8 P.) Was versteht man (anschaulich) unter dem bestimmten Integral einer reellwertigen Funktion f über einem Intervall $[a, b]$? Wann heißt so ein Integral uneigentlich? Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral und berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_x^y e^{\tan(z^2)}\, dz.$$

Wien, am 25. April 2008 (Ab hier freilassen!)

1) 4)

2) 5)

3)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Bestimmen Sie das Taylorsche Näherungspolynom 2. Ordnung an der Stelle $(x_0, y_0) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ der Funktion $f(x, y) = xy^2 + (y-1)e^{3x} + \cos(2\pi x + y)$.

2)(8 P.) Überprüfen Sie, ob das Vektorfeld $\mathbf{f} = (yz, xz - 2y, xy)$ eine Stammfunktion besitzt. Wenn ja, bestimmen Sie alle Stammfunktionen.

3)(8 P.) Bezeichne $k_i \subseteq \mathbb{R}^2$ den Rand des Kreises mit Radius i und Mittelpunkt $(0, 0)$. Sei $B \subseteq \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ der Bereich, der durch die erste Mediane (d.h. die Gerade mit der Gleichung $y = x$), die x-Achse und die Kreislinien k_1 und k_3 begrenzt wird. Fertigen Sie eine Skizze des Bereichs an und berechnen Sie das Integral

$$\iint\limits_B xy\,dx\,dy.$$

Hinweis: Polarkoordinaten.

4)(8 P.) Was versteht man unter einer linearen Rekursion k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten? Wie sieht die Lösungsgesamtheit einer homogenen bzw. einer inhomogenen linearen Rekursion k-ter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten) aus? Was versteht man unter dem Superpositionsprinzip?

5)(8 P.) Gegeben ist eine total differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Geben Sie eine geometrische (d.h. anschauliche) Definition von totaler Differenzierbarkeit. Wie sind die partiellen Ableitungen von f definiert? Was versteht man unter dem Gradient von f? Was sagt der Gradient von f an der Stelle (x_0, y_0) über den Funktionsgraph von f an dieser Stelle aus?

Wien, am 2. Juli 2009 (Ab hier freilassen!)

1)	4)
2)	5)
3)	

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Berechnen Sie

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2}\, dx.$$

2)(8 P.) Bestimmen Sie alle relativen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = e^x(x^3 - 3x^2 + 5x + y^2 - 5).$$

Bestimmen Sie auch, um welche Art von Extremum es sich jeweils handelt.

3)(8 P.) Berechnen Sie

$$\iint_B |y|(x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Kreisring $B = \{(x, y)|1 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$ ist.

4)(8 P.) Wozu dient das Gauß-Seidel-Verfahren? Beschreiben Sie auch die Problemstellung und das konkrete Verfahren. Unter welchen Voraussetzungen konvergiert das Verfahren?

5)(8 P.) Was versteht man unter einer homogenen bzw. inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung? Wie sieht die Struktur der Lösungsmenge einer linearen, homogenen Differentialgleichung k-ter Ordnung aus? Beschreiben Sie die Methoden „Trennung der Variablen“ und „Variation der Konstanten“.

Wien, am 2. Oktober 2009 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 9y' + 20y = e^{4x} + 1$$

2)(8 P.) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom dritten Grades zu den Interpolationsstellen $(0,8)$, $(2,4)$, $(4,20)$ und $(6,3)$ durch Lagrange-Interpolation.

3)(8 P.) Zeigen Sie, daß das Vektorfeld $f(x,y) = (xy^4, 2x^2y^3)$ eine Stammfunktion besitzt und berechnen Sie alle Stammfunktionen. Berechnen Sie weiters das Kurvenintegral dieses Vektorfelds über die Kurve $c(t) = (\sin t, \cos t)$, $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ und fertigen Sie eine Skizze dieser Kurve an.

4)(8 P.) Sei f eine auf dem Intervall $[a,b]$ definierte, reellwertige und beschränkte Funktion. Was versteht man unter einer Zerlegung des Intervalls $[a,b]$? Wie ist die Feinheit einer Zerlegung definiert? Was ist eine Riemann'sche Zwischensumme? Wie ist das bestimmte Integral von f über dem Intervall $[a,b]$ definiert?

5)(8 P.) Beschreiben Sie den Quicksortalgorithmus. Sei a_n die mittlere Anzahl der Vergleiche, die Quicksort zum Sortieren eines Datensatzes der Länge n benötigt. Stellen Sie eine Rekursion für a_n auf. (Begründung!) Welche Größenordnung hat a_n?

Wien, am 27. November 2009 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{i}{2n}},$$

indem Sie die Summe als Riemannsche Zwischensumme interpretieren.

2)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{t\to 0} f(at,bt)$ ($a,b \neq 0$ beliebig) und $\lim_{t\to 0} f(t^2,t)$. Ist f stetig an der Stelle $(0,0)$? (Begründung!)

3)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 8y' - 20y = e^{10x} + 1.$$

4)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Erklären Sie anschaulich, was die Begriffe partielle Ableitung, Richtungsableitung und totale Ableitung bedeuten. Wie lautet der Satz von Schwarz?

5)(8 P.) Was ist ein Vektorfeld? Was versteht man unter der Stammfunktion eines Vektorfeldes? Wann bezeichnet man eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ als offen, wann als einfach zusammenhängend?

Wien, am 29. Jänner 2010 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Lösen Sie die lineare Rekursion: $a_0 = 2, a_1 = 3$,

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n.$$

2)(8 P.) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C (z-y)\,dx + (x-z)\,dy + (x-y)\,dz$ längs der Kurve C mit der Parameterdarstellung $x = \sin t, y = 1 - \cos t, z = t$ vom Punkt mit dem Parameterwert $t = 0$ bis zum Punkt mit dem Parameterwert $t = \frac{\pi}{2}$. Ist der Wert des Integrals vom Weg abhängig? Skizzieren Sie die Kurve C oder beschreiben Sie sie anschaulich.

3)(8 P.) Untersuchen Sie, ob das folgende uneigentliche Integral konvergiert.

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^{3/2}}\,dx$$

Beachten Sie, daß das Integral vom gemischten Typ (1. und 2. Art) ist!

Hinweis: Zerlegen Sie das Integral in ein uneigentliches Integral erster Art und ein uneigentliches Integral zweiter Art.

4)(8 P.) Was versteht man unter Interpolation einer Funktion durch Polynome. Beschreiben Sie die Verfahren Lagrange-Interpolation und Spline-Interpolation.

5)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ an der Stelle (x_0, y_0) differenzierbar. Wie ist die Funktionalmatrix von f an dieser Stelle definiert?
Sei weiters $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ an der Stelle $(u_0, v_0, w_0) = f(x_0, y_0)$ differenzierbar. Wie lautet die Kettenregel für die Funktionalmatrix der Funktion $(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y))$?

Wien, am 5. März 2010 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Berechnen Sie
$$\int (\sin x)^5 (\cos x)^5 \, dx.$$

2)(8 P.) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursion
$$a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + n3^n$$
für $a_0 = a_1 = 1$.

3)(8 P.) Gegeben sei $f(x, y) = \frac{\ln(1+x^2)}{y} + y \sin(y)$ und der Punkt $P = (0, \pi)$. Weiters bezeichne n jene Niveaulinie von $f(x, y)$, die durch P geht.
a) Berechnen Sie grad$f$ im Punkt P.
b) Bestimmen Sie die Richtung von n im Punkt P, z.B. durch Angabe eines Richtungsvektors oder der Gleichung der Tangente an n durch P.

4)(8 P.) Wie ist das bestimmte Integral einer Funktion f über dem Intervall $[a, b]$ definiert? Was versteht man unter einem uneigentlichen Integral? Wie lautet das Integralkriterium zur Konvergenzuntersuchung von unendlichen Reihen?

5)(8 P.) Wie sind die Begriffe Vektorfeld bzw. Skalarfeld definiert? Was versteht man unter der Stammfunktion eines Vektorfelds? Geben Sie für den $\mathbb{R}^4$ je ein Beispiel eines Skalarfelds, eines Vektorfelds mit Stammfunktion und eines Vektorfelds, das keine Stammfunktion besitzt.

Wien, am 23. April 2010 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : [1.0, 1.4] \to [1.0, 1.4]$$
$$x \mapsto x - e^{-x} + \cos x$$

eine kontrahierende Abbildung ist und berechnen Sie den (einzigen) Fixpunkt x^* dieser Funktion auf zwei Nachkommastellen genau.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß im angebenen Intervall $f''(x) < 0$ gilt. Was kann man daraus für $f'(x)$ schließen? (Begründung!) Benutzen Sie dies, um die Kontraktionseigenschaft zu zeigen!

2)(8 P.) Berechnen Sie

$$\iint_B xy\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

wobei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2,\ x,y \geq 0\}$ ist.

3)(8 P.) Man untersuche mit Hilfe des Integralkriteriums, ob die folgenden Reihen konvergieren:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n^2)} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\log n)^2}$$

4)(8 P.) Was versteht man unter einer homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung? Wie sieht die Lösungsgesamtheit so einer Gleichung aus? Was versteht man unter der charakteristischen Gleichung einer homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, und wie hängen die Lösungen der charakteristischen Gleichung mit den Lösungen der Differenzengleichung zusammen?

5)(8 P.) Sei $f(x,y)$ eine reellwertige Funktion. Wie ist die partielle Ableitung von f im Punkt (x_0, y_0) definiert? Wie lautet die Kettenregel für das Ableiten von $F(x) = f(u(x), v(x))$? Wie berechnet man die Ableitung von $y(x)$, wenn $y(x)$ die Lösung der Gleichung $F(x,y) = 0$ ist? (Begründung!)

Wien, am 5. Juli 2011 (Ab hier freilassen!)

1)

4)

2)

5)

3)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix positiv definit?

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a & 3 \end{pmatrix}$$

2)(8 P.) Untersuchen Sie das folgende Integral auf Konvergenz und berechnen Sie es gegebenfalls:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Hinweis zum Berechnen des Integrals: Mit Hilfe der Identität $1 = (1+x^2) - x^2$, angewandt auf den Zähler des Integranden, läßt sich das Integral in zwei Integrale zerlegen. Vereinfachen Sie das erste und wenden Sie dann partielle Integration an.

3)(8 P.) Bestimmen Sie das Taylorsche Näherungspolynom 2. Ordnung an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$ der Funktion

$$f(x,y) = xy + (y-1)e^{3x} + \cos(2x+y).$$

4)(8 P.) Was versteht man unter einer offenen, einer abgeschlossenen bzw. einer kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Geben Sie je ein Beispiel einer solchen Menge an.

5)(8 P.) Was versteht man unter einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung? Wie sieht die Lösungsgesamtheit einer homogenen, linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung aus? Beschreiben Sie ein Verfahren zur Lösung einer homogenen, linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Wien, am 14. Oktober 2011 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Berechnen Sie

$$\iiint_Z |y| \cdot z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

wobei $Z \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinderring $Z = \{(x,y,z) | 0 \le z \le 3, 1 \le x^2+y^2 \le 2\}$ ist.

2)(8 P.) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursion $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

3)(8 P.) Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{x}{x^2-x-6}\,dx$$

4)(8 P.) Was versteht man unter einer offenen, einer abgeschlossenen bzw. einer kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Geben Sie je ein Beispiel einer solchen Menge an.

5)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen bis inklusive zweiter Ordnung existieren und stetig sind. Wie kann f mit Hilfe des Satzes von Taylor linear approximiert werden? Wie sieht dann das Restglied aus? Was bedeutet, daß eine symmetrische und quadratische Matrix positiv definit ist? Sei $(\mathrm{grad} f)(x_0,y_0,z_0) = 0$. Begründen Sie, warum man bei positiv definiter Hessematrix an der Stelle (x_0,y_0,z_0) schließen kann, daß (x_0,y_0,z_0) ein lokales Minimum von f ist?

Anmerkung: Bei der dritten Frage ist nicht danach gefragt, wie man Definitheit (mittels Hauptminorenkriterium) feststellen kann.

Wien, am 25. November 2011 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Berechnen Sie

$$\iiint_Z xyz\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

wobei $Z \subset \mathbb{R}^3$ der Bereich $Z = \{(x,y,z) | 2 \le z \le 5 - \sqrt{x^2+y^2}, 1 \le x^2+y^2 \le 2\}$ ist.

2)(8 P.) Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren alle Extrema der Funktion $f(x,y) = x + y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

3)(8 P.) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursion $a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 2$, mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

4)(8 P.) Sei $f(x,y)$ eine reellwertige Funktion. Wie ist die partielle Ableitung von f im Punkt (x_0, y_0) definiert? Wie lautet die Kettenregel für das Ableiten von $F(x) = f(u(x), v(x))$? Wie berechnet man die Ableitung von $y(x)$, wenn $y(x)$ die Lösung der Gleichung $F(x,y) = 0$ ist? (Begründung!)

5)(8 P.) Wie ist das bestimmte Integral einer Funktion f über dem Intervall $[a,b]$ definiert? Was versteht man unter einem uneigentlichen Integral? Wie lautet das Integralkriterium zur Konvergenzuntersuchung von unendlichen Reihen?

Wien, am 31. Jänner 2012 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{R}$ die durch $f(x,y,z) = \frac{\log(1+y^2)}{z} + z\cos x$ gegebene Funktion und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{v}$.

2)(8 P.) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursion $a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 2$, mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

3)(8 P.) Gegeben sei das Flächenstück F, das durch die Kurven $y = x$, $xy = 4$ und $x = 4$ begrenzt wird. Skizzieren Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie $\iint\limits_F y\,dx\,dy$.

4)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbf{R}$. Definieren Sie die Begriffe "relatives Maximum (Minimum)" und "absolutes Maximum (Minimum)" von f. Geben Sie weiters je eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines relativen Extremums von f an. Prüfen Sie, ob die Funktion $f(x,y) = x^3 + 3xy - 5x - 10y$ im Punkt $(1,3)$ ein relatives Extremum besitzt.

5)(8 P.) Wann nennt man eine Abbildung $f : [a,b] \to [a,b]$ kontrahierend? Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ differenzierbar. Warum folgt aus $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in [a,b]$, daß f eine Kontraktion ist? Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ eine Kontraktion. Wieviele Elemente hat dann die Menge $\{x \in [a,b] \mid f(x) = x\}$ und wie können diese bestimmt werden?

Wien, am 9. März 2012 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren denjenigen Punkt auf der Parabel $x^2 + y = 1$, der dem Ursprung am nächsten liegt!

2)(8 P.) Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{x}{x^2 - x - 6}\, dx$$

3)(8 P.) Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Iterationsverfahrens eine Näherungslösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrcr} 0,9x_1 & -2,2x_2 & +8,5x_3 & = & 22,22 \\ 6x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 3,03 \\ 2,8x_1 & +5,1x_2 & -x_3 & = & 10,10 \end{array}$$

Die Lösungen sind auf zwei Nachkommastellen genau zu bestimmen.

Anleitung: Ordnen Sie zunächst die einzelnen Gleichungen bzw. Variablen derart um, daß das entstehende System das Zeilensummenkriterium erfüllt.

4)(8 P.) Sei $f(x, y)$ eine reellwertige Funktion. Wie ist die partielle Ableitung von f im Punkt (x_0, y_0) definiert? Wie lautet die Kettenregel für das Ableiten von $F(x) = f(u(x), v(x))$? Wie berechnet man die Ableitung von $y(x)$, wenn $y(x)$ die Lösung der Gleichung $F(x, y) = 0$ ist? (Begründung!)

5)(8 P.) Sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte, reellwertige und beschränkte Funktion. Was versteht man unter einer Riemann'sche Zwischensumme von f über $[a, b]$? Wie ist das bestimmte Integral von f über dem Intervall $[a, b]$ definiert? Geben Sie ein Beispiel einer Funktion f, für die das bestimmte Integral über dem Intervall $[a, b]$ nicht existiert. Begründen Sie auch, warum es nicht existiert. Wie ist das unbestimmte Integral der Funktion f definiert?

Wien, am 11. Mai 2012 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 2

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Berechnen Sie das Bereichsintegral $\iint_B (1 + 2xy)\, dx\, dy$, wobei der Bereich B das Dreieck in der (x, y)-Ebene mit den Eckpunkten $(0, 0), (6, 0)$ und $(0, 3)$ bezeichnet.

2)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$(n + 1)^2 a_n = n^2 a_{n-1} + n + 1, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

mit Hilfe der Methode „Variation der Konstanten".

3)(8 P.) Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = \frac{3}{2e^2} - xe^x$ auf dem Intervall $I = [2, 0]$ konkav ist und berechnen Sie den Inhalt des vom Funktionsgraphen und der x-Achse zwischen $x = -2$ und $x = 0$ eingeschlossenen Flächenstücks.

4)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen bis inklusive zweiter Ordnung existieren und stetig sind. Wie kann f mit Hilfe des Satzes von Taylor linear approximiert werden? Wie sieht dann das Restglied aus? Was bedeutet, daß eine symmetrische und quadratische Matrix positiv definit ist? Sei $(\text{grad} f)(x_0, y_0, z_0) = 0$. Begründen Sie, warum man bei positiv definiter Hessematrix an der Stelle (x_0, y_0, z_0) schließen kann, daß (x_0, y_0, z_0) ein lokales Minimum von f ist?

Anmerkung: Bei der dritten Frage ist nicht danach gefragt, wie man Definitheit (mittels Hauptminorenkriterium) feststellen kann.

5)(8 P.) Geben Sie genaue Definitionen für die Begriffe „Gradientenfeld" und „Stammfunktion eines Vektorfeldes $\vec{f}(\vec{x})$" an! Was versteht man unter den Integrabilitätsbedingungen? Wie ist das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\vec{f}(\vec{x})$ längs der Kurve $\vec{c}(t)$ definiert? Sei $\vec{f}(\vec{x})$ ein Gradientenfeld und $\vec{c}(t)$ eine stetig differenzierbare geschlossene Kurve in einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Welchen Wert besitzt dann das Kurvenintegral

$$\oint_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x}$$

von $\vec{f}(\vec{x})$ längs $\vec{c}(t)$?

Wien, am 3. Juli 2012 (Ab hier freilassen!)

1)

4)

2)

5)

3)