Wie formuliert man einen Beweis? $\forall, \exists, \Rightarrow$

- *Zu zeigen ist* $\forall x\ A(x)$.
  Sei x beliebig (aber ab jetzt fest). Wir wollen $A(x)$ (nur für dieses eine x!) zeigen. (Wir dürfen uns das x nicht aussuchen.)
- *Zu zeigen ist* $\exists x\ A(x)$.
  Zuerst braucht man eine Idee, welches x uns passt. Dann: Wir definieren/wählen x wie folgt: ... Jetzt zeigen wir (für dieses feste x) die Eigenschaft $A(x)$.
- *Zu zeigen ist* $A(x) \Rightarrow B(x)$.
  Wir nehmen an, dass $A(x)$ gilt. Jetzt beweisen wir $B(x)$ (Wobei wir die Annahme $A(x)$ verwenden dürfen).

Wie formuliert man einen Beweis? $\vee, \wedge, \neg, \Leftrightarrow$

- *Zu zeigen ist $A \Leftrightarrow B$.*
  Man zeigt $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$.
- *Zu zeigen ist $A \wedge B$.*
  Man zeigt zuerst A und dann B.
- *Zu zeigen ist $A \vee B$.* Es gibt verschiedene Möglichkeiten, z.B.
  - Man zeigt $\neg A \Rightarrow B$. (Oder $\neg B \Rightarrow A$.)
  - Man zeigt $(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow F$, wobei F irgend eine falsche Aussage ist (indirekter Beweis).
  - Man braucht eine Idee für eine Fallunterscheidung, zum Beispiel in die Fälle D und $\neg D$. Dann zeigt man $D \Rightarrow A$ und $\neg D \Rightarrow B$.
- *Zu zeigen ist $\neg A$.*
  Zuerst formulieren wir $\neg A$ zu einer äquivalenten Aussage B um, die nicht die Form $\neg \ldots$ hat. Dann zeigen wir B. Zum Beispiel ist $\neg \forall x : P(x)$ äquivalent zu $\exists x : \neg P(x)$.

Wie verwendet man eine Annahme?

Wenn in der Angabe eine Behauptung D bereits vorgegeben ist (zum Beispiel: Sei M eine nichtleere Menge), oder wenn wir D schon bewiesen haben, oder wenn wir eine Implikation $D \Rightarrow B$ beweisen wollen, dann ist D eine Annahme, die wir im folgenden Beweis verwenden dürfen.

- Wenn D die Form $\forall x : A(x)$ hat, dann brauchen wir eine Idee. Wir wählen ein passendes x_0 (oder vielleicht auch ein x_1 und x_2), und verwenden im Folgenden die Aussagen $A(x_0)$. (Oder $A(x_1) \wedge A(x_2)$.
- Wenn D die Form $\exists x : A(x)$ hat, dann erfinden wir einen Namen, z.B. x_0, für ein Objekt, das die Eigenschaft A hat. (Abgesehen davon wissen wir nichts über x_0. Wir dürfen das x_0 also nicht aussuchen.) Dann verwenden wir die Aussage $A(x_0)$.
- Wenn D die Form $A \Rightarrow B$ hat, dann versuchen wir, A zu beweisen. Sobald das geschafft ist, dürfen wir B verwenden.

Beweise mit Mengen

- *Zu zeigen ist* $A \subseteq B$.
  Mit anderen Worten: $\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$.
  `Sei` $x \in A$ `beliebig. Dann gilt ...`arbeiten, rechnen,
  `..., daher` $x \in B$`.`
  Wenn A die Form $\{x \in C : E(x)\}$ hat, und
  $B = \{y \in C' : E'(y)\}$. dann ist
  $\forall x : \Big((x \in C \wedge E(x)) \Rightarrow (x \in C' \wedge E'(x)) \Big)$ zu zeigen.
- *Zu zeigen ist* $A = B$.
  Man zeigt $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.
- *Zu zeigen ist* $A \cap B = \emptyset$.
  Man zeigt $\forall x : (x \in A \Rightarrow x \notin B)$.
- *Zu zeigen ist* $A \cap B \neq \emptyset$.
  Man zeigt $\exists x : (x \in A \wedge x \in B)$. (Man findet also ein Element, das in A und in B liegt.)

Beweise mit Induktion

Oft wollen (müssen?) wir zeigen, dass alle natürlichen Zahlen n eine **Eigenschaft** E haben — abgekürzt: $\forall n (n \in \mathbb{N} \Rightarrow E(n))$; oder äquivalent: wir haben eine **Menge** M definiert, z.B. $M := \{n \in \mathbb{N} : E(n)\}$, und wir wollen zeigen, dass $M = \mathbb{N}$ gilt. Dazu kann man die folgenden drei Schritte verwenden:

1. Formulieren Sie $E(n)$ bzw definieren Sie M.
2. Zeigen Sie, dass $E(0)$ gilt, bzw dass $0 \in M$.
3. Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{N} : (E(n) \Rightarrow E(n{+}1))$ bzw $\forall n \, (n \in M \Rightarrow n{+}1 \in M)$.

ACHTUNG!

- Oft ergibt sich die Fomulierung automatisch aus der Angabe. Aber nicht immer, etwa wenn $\forall n, k \in \mathbb{N} : E(n, k)$ zu zeigen ist. (Beispiel: Beweis von $\forall n, k : S^k(n) = S^n(k)$ in der EIMA.)
- In Schritt 3 ist ein **Allsatz** „für alle n" zu beweisen, also „Sei n beliebig. Nehmen wir an, das $n \in M$. Zu zeigen ist $n + 1 \in M$". Bitte beginnen Sie diesen Beweisschritt **nicht** mit einer **Existenzaussage** „Angenommen, es gibt ein $n \in M$. . . "