Axiome von ZFC

Extensionalitätsaxiom: jede Menge ist durch ihre Extension bestimmt

$$\forall A\,\forall B\,[A \neq B \to \exists x (x \epsilon A \wedge x \notin B \ \vee \ x \notin A \wedge x \epsilon B)]$$

Nullmengenaxiom: es gibt (mindestens) eine leere Menge

$$\exists N\ \forall x : x \notin N$$

Paarmengenaxiom: zu je zwei Mengen x, y gibt es eine Menge $p = \{x, y\}$

$$\forall x\,\forall y\,\exists p : \quad \forall z \Big[z \epsilon p \ \leftrightarrow \ z = x \vee z = y \Big]$$

Vereinigungsmengenaxiom: Zu jeder Menge $\mathscr{A}$ gibt es die Menge $\{z : \exists A\, z \in A \wedge A \in \mathscr{A}\}$

$$\forall \mathscr{A}\ \exists B : \quad \forall z \Big[z \epsilon B \ \leftrightarrow \ \exists A \epsilon \mathscr{A}\ z \epsilon A \Big]$$

Aussonderungsaxiom

(Dies ist nicht ein einzelnes Axiom, sondern ein „Axiomenschema“ = eine Liste von Axiomen, die alle dieselbe Bauart aufweisen.) Für jede Formel $\varphi(x)$ in der die Variable B nicht (oder jedenfalls nicht frei) vorkommt:

$$\forall A\,\exists B\ \forall z \Big[z \epsilon B \ \leftrightarrow \ z \epsilon A \wedge \varphi(z) \Big]$$

es wird also die „Existenz“ der Menge $\{z : z \in A \wedge \varphi(z)\}$ gefordert. φ darf auch von anderen Variablen („Parametern“) abhängen, also sollte man genauer schreiben:
Für jede Formel $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$, in der B nicht vorkommt:

$$\forall p_1 \cdots \forall p_n\ \forall A\,\exists B\ \forall z \Big[z \epsilon B \ \leftrightarrow \ z \epsilon A \wedge \varphi(z, p_1, \ldots, p_n) \Big]$$

Regularitätsaxiom[1]: jede Menge hat ein „ϵ-minimales“ Element

$$\forall \mathscr{A} [\mathscr{A} \neq \emptyset^2 \;\rightarrow\; \exists B \epsilon \mathscr{A} \; \forall c \epsilon \mathscr{A} : c \not\epsilon B]$$

(Dieses Axiom schließt unter anderem Mengen x aus, die $x \in x$, oder $x \in y \in x$ erfüllen.)

Potenzmengenaxiom: Zu jeder Menge A gibt es die „Potenzmenge“ $\mathfrak{P}(A)$

$$\forall A \, \exists P \, \forall B \, [B \epsilon P \;\leftrightarrow\; B \subseteq A]$$

Unendlichkeitsaxiom. Es gibt eine kleinste induktive Menge

$$\exists A \, \forall x \left[x \epsilon A \;\leftrightarrow\; \forall B (B \text{ induktiv}^3 \rightarrow x \epsilon B) \right]$$

(Diese Formel sagt eigentlich, dass es den Durchschnitt aller induktiven Mengen gibt. Äquivalent dazu wäre die Formel $\exists A \, \forall x \left[\cdots \right] \wedge \; A$ induktiv.)

Ersetzungsaxiom

(Wieder ein Axiomenschema)
Für jede Formel $\varphi(x, y)$:

$$\forall A \, [\forall x \epsilon A \, \exists! y \, \varphi(x, y)] \;\rightarrow \exists B \forall y [y \epsilon B \;\leftrightarrow\; \exists x \epsilon A (\varphi(x, y))]$$

D.h., wenn φ eine „funktionale Zuordnung“ $x \mapsto f(x)$ arstellt, dann gibt es zu jeder „Definitionsmenge“ A eine „Wertemenge“ $B = \{f(x) : x \in A\}$.
Hier darf φ auch „Parameter“ enthalten, z.B. mit einem zusätzlichen Parameter wäre $\varphi = \varphi(x, y, z)$, dann lautet dieses Axiom eigentlich:

$$\forall p \; \forall A \left([\forall x \epsilon A \, \exists! y \, \varphi(x, y, p)] \;\rightarrow \exists B \forall y [y \epsilon B \;\leftrightarrow\; \exists x \epsilon A (\varphi(x, y, p))] \right)$$

Auswahlaxiom. Zu jeder Familie disjunkter Mengen gibt es eine Auswahlmenge.

$$\forall \mathscr{A} \left(\emptyset \not\epsilon \mathscr{A} \; \wedge \forall B, C \epsilon \mathscr{A} : (B \neq C \rightarrow B \cap C = \emptyset) \right) \;\rightarrow\; \exists Z \, \forall B \epsilon \mathscr{A} \, \exists! z (Z \cap B = \{z\})$$

$Z \cap B = \{z\}$ könnte man ausführlicher als $\forall x \; (x = z \leftrightarrow x \epsilon Z \wedge x \epsilon B)$ schreiben.

[1] Das Regularitätsaxiom haben wir in der Vorlesung nicht besprochen

[2] „$\mathscr{A} \neq \emptyset$“ ist hier natürlich als Abkürzung für die Formel „$\exists B \; B \epsilon \mathscr{A}$“ zu lesen.

[3] Wir schreiben „A induktiv“ als Abkürzung für $\emptyset \epsilon A \wedge \forall x \, [x \epsilon A \rightarrow x \cup \{x\} \epsilon A]$; „$\emptyset \epsilon A$“ ist hier als Abkürzung für die Formel $\exists N \, (N \epsilon A \; \wedge \forall y \, y \not\epsilon N)$ zu lesen. Eine induktive Menge muss also $0 := \emptyset$ enthalten, weiters $1 := 0 \cup \{0\} = \{0\}$, $2 := \{0, 1\}$, $\ldots$, $4 := 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}$, etc.