Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

e-mail: ______________________________

Algebra, Prüfung am 26.6.2014, Goldstern

Wann wollen Sie zur mündlichen Prüfung antreten?

- ○ heute, 26.6.
- ○ morgen (Freitag 27.6., nachmittags)
- ○ Montag 30.6.
- ○ Montag 7.7.
- ○ Dienstag 8.7.
- ○ Mittwoch 16.7. (nachmittags)
- ○ später im Juli (ab 21.7.) — wann?
- ○ später — wann?

Erläuterungen

„*Beschreiben* Sie das Objekt X“ bedeutet: Geben Sie alle wichtigen Eigenschaften von X an; dies heißt insbesondere:

- Geben Sie an, was die Elemente oder Komponenten von X sind. Wenn X eine endliche oder abzählbare Menge ist, geben Sie die Elemente an, etwa ein Form einer (abgebrochenen) systematischen Aufzählung. Geben Sie jedenfalls an, ob es endlich oder unendlich viele sind; wenn endlich, dann geben Sie auch die Anzahl der Elemente oder zumindest gute untere und obere Schranken für die Anzahl an.
- Beschreiben Sie die (algebraische) Struktur von X. Ist X eine Gruppe, ein Ring, ein Körper? (Wenn aber z.B. nach einer Beschreibung des Körpers K gefragt wird, müssen Sie natürlich nicht extra erwähnen, dass K Körper ist.) Geben Sie ein nichttriviales Beispiel einer Rechnung in X an. (Für $X = C_{12}$ z.B: $10 + 6 = 4$.)

„*Schließen* Sie B aus A“ bedeutet: Erklären Sie, warum B aus A folgt. (Es genügt nicht, zu sagen: „A gilt, daraus schließe ich B.“)

1. Sei C_2 die Gruppe mit 2 Elementen; mit S_∞ bezeichnen wir die Gruppe aller Permutationen der Mengen $\mathbb{Z}$ aller ganzen Zahlen, mit S_3 die Gruppe aller Permutationen einer festen 3-elementigen Menge.

   (a) Definieren Sie den Begriff „Koprodukt von G_1 und G_2 in der Klasse *aller* Gruppen“, sowie den Begriff „Koprodukt von G_1 und G_2 in der Klasse aller *kommutativen* Gruppen“.
   Definieren Sie (für jede Gruppe G und jedes $g \in G$) den Begriff „Ordnung von g in G.“

   (b) Im Folgenden sei G das Koprodukt von C_2 und C_2 in der Klasse aller Gruppen.
   Sei weiters K das Koprodukt von C_2 und C_2 in der Klasse aller kommutativen Gruppen.
   Beschreiben Sie die Gruppe K.

   (c) Finden Sie zwei verschiedene nichtkonstante Homomorphismen $f_2 : C_2 \to S_3$. Verwenden Sie diese beiden Homomorphismen, um zu zeigen, dass G nicht kommutativ sein kann.

   (d) Seien π_1 und π_2 die durch

   $$\forall n : \Big(\pi_1(2n) = 2n+1,\ \pi_2(2n) = 2n-1\Big), \qquad \pi_1 \circ \pi_1 = id_{\mathbb{Z}} = \pi_2 \circ \pi_2$$

   definierten Permutationen von $\mathbb{Z}$.

   - Geben Sie eine Wertetabelle für π_1, π_2, $\pi_1 \circ \pi_2$ an. (Natürlich nur einen endlichen Ausschnitt, aus dem man aber auch die übrigen Werte leicht erschließen kann.) Geben Sie die Ordnungen von π_1, π_2, $\pi_1 \circ \pi_2$ an.
   - *Schließen* Sie daraus, dass die von π_1 und π_2 erzeugte Untergruppe von S_∞ unendliche viele Elemente haben muss.

   (e) Zeigen Sie, dass G unendliche viele Elemente haben muss.

2. Sei $R = \mathbb{Q}[x, y]$ der Ring aller Polynome in zwei Variablen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$.
   (R kann auch als Polynomring über dem Ring $\mathbb{Q}[x]$ aufgefasst werden, und ist daher ein Integritätsbereich.)
   Mit (x), (y), (x, y), $(x - y)$ bezeichnen wir die Ideale, die von den jeweiligen Polynomen erzeugt werden; zum Beispiel ist (x, y) das kleinste Ideal, das sowohl das Polynom x als auch das Polynom y enthält.

   (a) *Beschreiben* Sie die Ringe $R/\{0\}$, $R/(x)$, $R/(y)$, $R/(x, y)$, $R/(x - y)$. (Etwa indem Sie wohlbekannte Ringe finden, zu denen die angegebenen Ringe isomorph sind.)
   Ihre Beschreibung sollte insbesondere die folgenden Fragen beantworten:

   (b) Welche dieser Ringe sind Integritätsbereiche, welche sind Körper?

   (c) Geben Sie an, welche dieser 5 Ringe zu welchen anderen isomorph sind. Geben Sie gegebenenfalls Isomorphismen an, bzw. erklären Sie, warum die jeweiligen Ringe nicht isomorph sind.

   (d) Geben Sie für jedes der genannte Ideale I beispielhaft an, wie man zwei Elemente von R/I multipliziert. Etwa: Was erhält man, wenn man die Nebenklasse $2 + 3x^2 - 3y^2 + 4x^3y + I$ quadriert? (Für $I = \{0\}$, $I = (x)$, $I = (y)$, $I = (x, y)$, $I = (x - y)$.)