Algebra, Prüfung am 6.10.2014, Goldstern
Lösungsskizzen

1. *In dieser Aufgabe betrachten wir nur Integritätsbereiche; unter Homomorphismen/Isomorphismen verstehen wir immer Abbildungen, die nicht nur Addition und Multiplikation erhalten sondern auch Einselemente.*

   (a) *Definieren Sie die Begriffe „irreduzibel“, „prim“, „faktorieller Ring“ (=ZPE-Ring).*

   Leicht. Siehe Skriptum.

   (b) *Gegen Sie eine Bedingung (genauer: die Konjunktion zweier aus der Vorlesung bekannter Bedingungen) an, die notwendig und hinreichend dafür ist, dass R ein faktorieller Ring ist.*

   Ein Integritätsbereich R ist genau dann faktoriell, wenn er die Bedingungen (i-p) und (TK) erfüllt:

   (i-p) Jedes irreduzibel $x \in R$ ist prim.

   (TK) Es gibt keine unendlichen absteigenden Teilerketten, das heißt: Für alle Folgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ von Elementen von R, die $\forall n : x_{n+1} | x_n$ erfüllen, muss es ein n geben mit $x_n | x_{n+1}$. (Äquivalent: $x_n \sim x_{n+1}$.

   (c) *Zeigen Sie: Wenn $\varphi_1 : \mathbb{Z}[x] \to R_1$ ein Isomorphismus ist, dann gibt es einen Ring R_2 mit folgenden Eigenschaften:*

   - *R_1 ist Unterring von R_2.*
   - *Es gibt einen Isomorphismus $\varphi_2 : \mathbb{Z}[x] \to R_2$.*
   - *$\varphi_2(x)$ ist prim in R_2, und ist (in R_2) ein echter Teiler von $\varphi_1(x)$. (Daher ist $\varphi_1(x)$ zwar prim in R_1, aber nicht prim in R_2!)*

   Sei S_2 der Polynomring $\mathbb{Z}[y]$, und sei $S_1 := \{p(y^2) : p(y) \in \mathbb{Z}[y]\}$.
   Dann ist $R_1 \simeq S_1$ (Isomorphismus $\varphi_{11} : \varphi_1(x) \mapsto y^2$), ebenso ist $R_1 \simeq S_2$ (Isomorphismus $\varphi_{12} : \varphi_1(x) \mapsto y$).
   In S_1 ist y^2 (als Bild des primen Elements $\varphi_1(x)$) prim, hat aber in S_2 den echten Teiler y.
   Wegen $R_1 \simeq S_1$ dürfen wir oBdA $R_1 = S_1$ annehmen; wir können nun $R_2 := S_2$ setzen.

   (d) *Zeigen Sie: Es gibt eine aufsteigende Folge von Ringen $R_1 \subseteq R_2 \subseteq \cdots$ mit folgenden Eigenschaften:*

   - *Für alle n ist R_n ein faktorieller Ring. (Sogar isomorph zu $\mathbb{Z}[x]$.)*
   - *Es gibt eine Folge $(r_1, r_2, \ldots)$, sodass für alle n das Element r_n in R_n prim ist, und dass r_{n+1} ein echter Teiler von r_n ist.*
   - *$\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ ist kein faktorieller Ring.*

   Genauer: Zeigen *Sie, wie die R_n konstruiert werden können, und* beweisen *Sie die angeführten Eigenschaften.*

   Wir beginnen mit $R_1 := \mathbb{Z}[x]$. Nun wählen wir R_2 wie in (c). Das Element x ist in R_1 prim, hat aber in R_2 einen echten Teiler x_2. (Mit $x_2^2 = x_1$.)
   Es gilt $R_2 \simeq \mathbb{Z}[x]$, wobei der Isomorphismus x_2 auf x abbildet. Daher können wir (gemäß (b)) einen Ring R_3 finden, sowie ein Element $x_3 \in R_3$ mit $x_3^2 = x_2$. Überdies gilt $R_3 \simeq \mathbb{Z}[x]$ mit einem Isomorphismus $x_3 \mapsto x$.
   Induktiv konstruieren wir eine aufsteigende Folge (R_n) von Ringen, mit $x_n \in R_n$ prim in R_n, aber x_n hat in R_{n+1} den echten Teiler x_{n+1}, mit $x_{n+1}^2 = x_n$.
   Die Vereinigung der R_n ist noch immer Integritätsbereich, aber kann kein faktorieller Ring sein, weil die x_n eine absteigende Teilerkette bilden.

2. *Sei $\mathcal{K}_{1,0,0}$ die Klasse aller Algebren (A, f, c, d) vom Typ $(1, 0, 0)$ (also mit einer einstelligen Operation f und nullstelligen Operationen (=Konstanten) c, d.*
Sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller Algebren $(A, f, c, d) \in \mathcal{K}_{1,0,0}$, die das Gesetz $\forall x : f(f(x)) = x$ erfüllen.
In dieser Aufgabe betrachten wir nur Algebren in $\mathcal{K}$.

   (a) *Definieren Sie die Begriffe „C ist in $\mathcal{K}$ von B frei erzeugt“ und „Koprodukt von C_1 und C_2 in $\mathcal{K}$“.*
   $C \in \mathcal{K}$, $B \subseteq C$, und für alle $D \in \mathcal{K}$ und alle Funktionen $j : B \to D$ gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi : C \to D$, der j fortsetzt.
   (C, i_1, i_2) ist Koprodukt von C_1, C_2 in $\mathcal{K}$, wenn $C \in \mathcal{K}$ ist, $i_1 : C_1 \to C$ und $i_2 : C_2 \to C$ Homomorphismen sind, und weiters gilt:
   Für alle $D \in \mathcal{K}$ für alle Paare (φ_1, φ_2) von Homomorphismen, die $\varphi_1 : C_1 \to D$, $\varphi_2 : C_2 \to D$ erfüllen, gibt es genau einen Homomorphismus $h : C \to D$, der $h \circ i_1 = \varphi_1$ und $h \circ i_2 = \varphi_2$ erfüllt.

   (b) *Beschreiben sie alle Algebren in $\mathcal{K}$ mit genau 3 Elementen. (Bis auf Isomorphie, siehe die umseitige Bemerkung.)*
   Wir betrachten alle Algebren (A, f, c, d) auf der Menge $A = \{1, 2, 3\}$. f ist eine Permutation, deren Zyklen alle die Länge 1 oder 2 haben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist f entweder die Identität, oder die Abbildung mit $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$.

   - Im ersten Fall gibt es die Möglichkeiten $c = d$ oder $c \neq d$. Also bis auf Isomorphie muss entweder $c = d = 1$ oder $c = 1, d = 2$ sein.
     Das sind 2 nichtisomorphe Algebren.
   - Im zweiten Fall gibt es zunächst die Möglichkeit, dass $c = d$ ist, dann kann c entweder ein Fixpunkt von f sein ($c = d = 3$), oder nicht (oBdA $c = d = 1$). Das sind 2 Möglichkeiten.
   - Schließlich gibt es noch den Unterfall, dass $c \neq d$ ist. Nun kann c oder d Fixpunkt von f sein (oBdA $c = 3, d = 1$ bzw. $d = 3, c = 1$), oder f vertauscht c und d. (oBdA $c = 1, d = 2$)
     Das sind 3 Möglichkeiten.

   Insgesamt: 7 Algebren.

   (c) *Zeigen Sie, dass die Algebra $(\mathbb{Z}, -, 1, -1)$ zwar in $\mathcal{K}$ liegt, aber in $\mathcal{K}$ nicht frei ist. (Mit „$-$“ ist hier die einstellige Funktion $x \mapsto -x$ gemeint.)*
   Nachzurechnen ist, dass $f(f(x)) = x$ ist. $-(-x) = x$ ist aus der Schule (und VO) bekannt.

   Nehmen wir an, dass $\mathbb{Z}$ frei über einer Menge B ist. Sei D die Unteralgebra von $\mathbb{Z}$, die nur aus den Elementen 1 und -1 besteht. Diese Algebra liegt in $\mathcal{K}$. Sei j irgendeine Abbildung von B nach $D = \{1, -1\}$ (zum Beispiel jene, die immer den Wert 1 annimmt).
   Es gibt keinen Homomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach $\{1, -1\}$, denn 0 ist Fixpunkt von f, aber in $\{1, -1\}$ gibt es keinen Fixpunkt. Daher ist $\mathbb{Z}$ nicht frei.

(d) *Suchen Sie sich 2 nicht isomorphe Algebren C_1, C_2 in $\mathcal{K}$ mit jeweils mehr als einem Element aus, und beschreiben Sie das Koprodukt von C_1 und C_2. (Hinweis: Das Koprodukt von 2 endlichen Algebren in $\mathcal{K}$ ist immer endlich. Wenn Sie C_1, C_2 geschickt wählen, wird das Koprodukt sogar besonders klein.)*

Sei $C_1 := \{1, -1\}$ mit $c = d = 1, f(x) = -x$.
Sei $C_2 := \{2, 3\}$ mit $c = 2, d = 3,\ f(x) = x$.
Sei K die einelementige Algebra, $K = \{1\}$. Wir behaupten, dass K (mit den konstanten Einbettungen) das Koprodukt von C_1 und C_2 ist.
Wenn $(D, f^D, c^D, d^D) \in \mathcal{K}$ eine beliebige Algebra ist, für die es Homomorphismen φ_1, φ_2 ($\varphi_i : C_i \to D$) gibt, dann überträgt sich wegen der Homomorphieeigenschaft von φ_1 die Gleichung $c = d$ von C_1 auf D, also $c^D = d^D$.
Weiters folgt aus der Homomorphieeigenschaft von φ_2, dass $f^D(c^D) = d^D$ ist. Also ist φ_2 konstant.
Aus $f^{C_1}(1) = -1$ ergibt sich durch Anwenden von φ_1 die Gleichung $f^D(c) = \varphi_1(-1)$, also ist auch φ_1 konstant mit Wert c^D.
Daher müssen beide Homomorphismen φ_1 und φ_2 konstant mit Wert $c^D = d^D$ sein. Nun lässt sich leicht der gesuchte Homomorphismus $h : K \to D$ finden.