Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

e-mail: ______________________________

Algebra, Prüfung am 6.10.2014, Goldstern

Wann wollen Sie zur mündlichen Prüfung antreten?

- ○ heute, 6.10., 15:00 oder später
- ○ morgen, 7.10., 10:00 oder 16:00
- ○ Donnerstag 9.10., 10:00
- ○ nächste Woche – wann? (nicht Mittwoch,Freitag)
- ○ später im Oktober — wann?
- ○ später — wann?

Erläuterungen

„*Beschreiben* Sie das Objekt X“ bedeutet: Geben Sie alle wichtigen Eigenschaften von X an; dies heißt insbesondere:

- Geben Sie an, was die Elemente oder Komponenten von X sind. Wenn X eine endliche oder abzählbare Menge ist, geben Sie die Elemente an, etwa ein Form einer (abgebrochenen) systematischen Aufzählung. Geben Sie jedenfalls an, ob es endlich oder unendlich viele sind; wenn endlich, dann geben Sie auch die Anzahl der Elemente oder zumindest gute untere und obere Schranken für die Anzahl an.
- Wenn X eine Algebra mit höchstens 3 Elemente ist, geben Sie die Operationstafel(n) an.

„*Schließen* Sie Q aus P“ bedeutet: Erklären Sie, warum Q aus P folgt. (Es genügt nicht, zu sagen: „P gilt, daraus schließe ich Q.“)

Mit „*Finden* Sie alle Algebren A mit Eigenschaft E“ ist gemeint: alle bis auf Isomorphie. Das heißt: Geben Sie eine Liste von Algebren an, die alle die Eigenschaft E haben, sodass gilt: Jede Algebra mit Eigenschaft E ist zu GENAU EINER Algebra auf Ihrer Liste isomorph.

1. In dieser Aufgabe betrachten wir nur Integritätsbereiche; unter Homomorphismen/Isomorphismen verstehen wir immer Abbildungen, die nicht nur Addition und Multiplikation erhalten sondern auch Einselemente.

   (a) Definieren Sie die Begriffe „irreduzibel“, „prim“, „faktorieller Ring“ (=ZPE-Ring).

   (b) Gegen Sie eine Bedingung (genauer: die Konjunktion zweier aus der Vorlesung bekannter Bedingungen) an, die notwendig und hinreichend dafür ist, dass R ein faktorieller Ring ist.

   (c) Zeigen Sie: Wenn $\varphi_1 : \mathbb{Z}[x] \to R_1$ ein Isomorphismus ist, dann gibt es einen Ring R_2 mit folgenden Eigenschaften:

   - R_1 ist Unterring von R_2.
   - Es gibt einen Isomorphismus $\varphi_2 : \mathbb{Z}[x] \to R_2$.
   - $\varphi_2(x)$ ist prim in R_2, und ist (in R_2) ein echter Teiler von $\varphi_1(x)$. (Daher ist $\varphi_1(x)$ zwar prim in R_1, aber nicht prim in R_2!)

   Hinweis: Sei S_2 der Polynomring $\mathbb{Z}[y]$, und sei $S_1 := \{p(y^2) : p(y) \in \mathbb{Z}[y]\}$. Zeigen Sie, dass $S_1 \simeq R_1$ gilt, und dass das Paar (S_1, S_2) genau die Eigenschaften hat, die von (R_1, R_2) gefordert werden. Warum genügt das?

   Alternativer Hinweis: Sei K_1 der Quotientenkörper von R_1. Finden Sie einen Körper K_2, in dem es ein Element z mit $z^2 = x$ gibt, und finden Sie R_2 als geeigneten Unterring von K_2.

   Meta-Hinweis: Befolgen Sie entweder den Hinweis ODER den alternativen Hinweis. Aber nicht beide; das würde Sie und auch mich verwirren.

   (d) Zeigen Sie: Es gibt eine aufsteigende Folge von Ringen $R_1 \subseteq R_2 \subseteq \cdots$ mit folgenden Eigenschaften:

   - Für alle n ist R_n ein faktorieller Ring. (Sogar isomorph zu $\mathbb{Z}[x]$.)
   - Es gibt eine Folge $(r_1, r_2, \ldots)$, sodass für alle n das Element r_n in R_n prim ist, und dass r_{n+1} ein echter Teiler von r_n ist.
   - $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ ist kein faktorieller Ring.

   Genauer: *Zeigen* Sie, wie die R_n konstruiert werden können, und *beweisen* Sie die angeführten Eigenschaften.

   (Hinweis: (c)+Induktion, dann verwenden Sie (b). Sie dürfen den in (c) formulierten Satz verwenden, auch wenn Sie ihn nicht bewiesen haben.)

2. Sei $\mathcal{K}_{1,0,0}$ die Klasse aller Algebren (A, f, c, d) vom Typ $(1, 0, 0)$ (also mit einer einstelligen Operation f und nullstelligen Operationen (=Konstanten) c, d.
   Sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller Algebren $(A, f, c, d) \in \mathcal{K}_{1,0,0}$, die das Gesetz $\forall x : f(f(x)) = x$ erfüllen.
   In dieser Aufgabe betrachten wir nur Algebren in $\mathcal{K}$.

   (a) Definieren Sie die Begriffe „C ist in $\mathcal{K}$ von B frei erzeugt“ und „Koprodukt von C_1 und C_2 in $\mathcal{K}$“.

   (b) Beschreiben sie alle Algebren in $\mathcal{K}$ mit genau 3 Elementen. (Bis auf Isomorphie, siehe die umseitige Bemerkung.)
   Hinweis: Finden Sie 7 paarweise nichtisomorphe Algebren, und zeigen Sie, dass das schon alle sind. (Erklären Sie auch, warum diese Algebren paarweise nicht isomorph sind.)

   (c) Zeigen Sie, dass die Algebra $(\mathbb{Z}, -, 1, -1)$ zwar in $\mathcal{K}$ liegt, aber in $\mathcal{K}$ nicht frei ist. (Mit „$-$“ ist hier die einstellige Funktion $x \mapsto -x$ gemeint.)

   (d) Suchen Sie sich 2 nicht isomorphe Algebren C_1, C_2 in K mit jeweils mehr als einem Element aus, und beschreiben Sie das Koprodukt von C_1 und C_2. (Hinweis: Das Koprodukt von 2 endlichen Algebren in $\mathcal{K}$ ist immer endlich. Wenn Sie C_1, C_2 geschickt wählen, wird das Koprodukt sogar besonders klein.)