Martin Goldstern

Prüfung ALGEBRA, 2009-05-29

Bitte begründen Sie Ihre Antworten detailliert. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung zitieren, geben Sie den Wortlaut des Satzes an, und nicht nur den Namen. Wenn Sie einen Schluss „Aus A folgt B“ ziehen, und dabei eine wichtige Eigenschaft C verwenden, dann erwähnen Sie auch C, etwa in der Form „weil wir C schon bewiesen haben“, oder „weil C laut Voraussetzung gilt“.

1. Für jede Gruppe G sei $Z(G) := \{x \in G \mid \forall y \in G\,(xy = yx)\}$.
   (a) Definieren Sie die Begriffe „Untergruppe“ und „Normalteiler“.
   (b) Zeigen Sie, dass $Z(G)$ Normalteiler von G ist.
   (c) Sei S_3 die Menge aller Permutationen einer 3-elementigen Menge. Berechnen Sie $Z(S_3)$.
   (d) Berechnen Sie $Z(S_3 \times \mathbb{Z}_3)$. (Hinweis: Zeigen sie allgemein $Z(G_1 \times G_2) = Z(G_1) \times Z(G_2)$.)

2. Sei $\mathfrak{A}$ die Klasse aller Algebren vom Typ (1) (= Algebren mit einer einstelligen Operation).
   (a) Geben Sie (bis auf Isomorphie) alle 1-elementigen und alle 2-elementigen Algebren in $\mathfrak{A}$ an.
   (b) Definieren Sie den Begriff „frei erzeugt von X“.
   (c) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, S)$ (wobei S durch $S(n) = n + 1$ definiert ist) eine freie Algebra in $\mathfrak{A}$ ist. (Über welcher Erzeugendenmenge?)
   (d) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, S)$ (wieder $S(x) = x + 1$) nicht frei in $\mathfrak{A}$ ist.

3. (a) Definieren Sie die Begriffe „Nullstellenkörper“ „Zerfällungskörper“, „Galoisgruppe $Gal(L/K)$“. Formulieren Sie den Gradsatz.
   (b) Geben Sie das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$
      i. über $\mathbb{Q}$
      ii. über $\mathbb{R}$

      an.
   (c) Sei $m(x)$ das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$. Sei L der Zerfällungskörper des Polynoms m über $\mathbb{Q}$. Finden Sie den Grad von L über $\mathbb{Q}$. (Hinweis: wenden Sie den Gradsatz mit einem geeigneten Zwischenkörper an.)
   (d) Finden Sie einen nichttrivialen Zwischenkörper K (zwischen $\mathbb{Q}$ und L) berechnen Sie die zugehörige Galoisgruppe $Gal(L/K)$. (Mit „nichttrivial“ ist hier gemeint: $K \neq \mathbb{Q}$, $K \neq L$)

4. Sei B eine Boolesche Algebra mit 16 Elementen.
   (a) Erklären Sie, wie man B als Ring auffassen kann.
   (b) Definieren Sie die Begriffe „Ideal“ (im ringtheoretischen wie auch im verbandstheoretischen Sinn), „Filter“ und „Ultrafilter“.
   (c) Geben Sie alle Ideale von B an.
   (d) Geben Sie alle Kongruenzrelationen von B an. (Ob hier Ringkongruenzen oder Kongruenzen von B als Boolescher Algebra gemeint sind, können Sie sich aussuchen. Hinweis: Homomorphiesatz.)