

Name: _____

Matrikelnummer: _____

email: _____

(wenn nicht e...@student.tuwien.ac.at)

Prüfung ALGEBRA, 2019-06-25

Wann wollen Sie zur mündlichen Prüfung antreten?

- heute abend
- Donnerstag 27.6. 13:00
- Mittwoch 3.7. nachmittag
- In der Woche vom 15.7. bis 19.7.
- Terminvereinbarung per e-mail an goldstern@tuwien.ac.at

Hinweise

Bitte begründen Sie Ihre Antworten. (Außer wenn in der Angabe explizit steht, dass keine Begründung notwendig ist.)

Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung zitieren, geben Sie den Wortlaut des Satzes an, und nicht nur den Namen. Überprüfen Sie auch, ob die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind.

Wenn explizit nach einem Beweis eines Satzes aus der VO (oder eines Spezialfalls) gefragt ist, genügt es nicht, den Satz zu zitieren. Wenn die Frage etwa lautet „Beweisen Sie, dass der Vektorraum der Polynome eine Basis hat“, genügt es **NICHT**, mit „Jeder VR hat eine Basis“ zu antworten.

„Beschreiben Sie das Objekt (die Menge, die Struktur) X “ bedeutet: Geben Sie alle wichtigen Eigenschaften von X an; dies heißt insbesondere:

- Wenn X isomorph zu einer wohlbekanntem Struktur ist, oder es eine natürliche Bijektion zwischen X und einer wohlbekanntem Struktur gibt (oder sogar einen Isomorphismus — in welchem Sinn? Als Gruppe, als Ring, als Vektorraum, ...?), dann geben Sie diese Struktur und die Bijektion an. (Damit sind meistens die folgenden Punkte auch schon erledigt.)
- Geben Sie an, was die Elemente oder Komponenten von X sind.
- Wenn X eine endliche oder abzählbare Menge ist, geben Sie die Elemente von X an, zum Beispiel in Form einer (abgebrochenen) systematischen Aufzählung.
- Wenn X eine Klasse von Algebren ist, und Sie X „bis auf Isomorphie“ angeben sollen, dann ist nach einer (endlichen oder unendlichen) **Liste** mit folgenden Eigenschaften gefragt: Jedes Element der Liste ist in X ; umgekehrt ist jedes Element von X zu GENAU EINEM Element der Liste isomorph. (Insbesondere dürfen zwei verschiedene Elemente Ihrer Liste nicht isomorph sein.)
- Geben Sie jedenfalls an, ob es **endlich oder unendlich** viele sind; wenn endlich, dann geben Sie auch die **Anzahl der Elemente** oder zumindest gute untere und obere Schranken für die Anzahl an. (Sie müssen keine numerischen Rechnungen mit Zahlen über 30 durchführen; statt der Antworten 120 und 1024 würden auch die Antworten $5!$ und 2^{10} genügen.)
(Auch wenn Ihre Liste nur 3 oder 4 Strukturen enthält, geben Sie bitte explizit die Anzahl an.)
- Wenn X eine Algebra oder ein relationales System ist, beschreiben Sie die Struktur von X . Ist X eine Gruppe, ein Körper, eine lineare Ordnung? (Wenn aber z.B. nach einer Beschreibung des Körpers K gefragt wird, müssen Sie natürlich nicht extra erwähnen, dass K Körper ist. Oder dass jeder Körper automatisch ein Ring ist.)

1. Ein Verband ist eine Algebra (V, \wedge, \vee) vom Typ $(2, 2)$, die die Verbandsgesetze erfüllt.
Ein $\{0, 1\}$ -Verband ist eine Algebra $(V, \wedge, \vee, 0, 1)$ vom Typ $(2, 2, 0, 0)$, sodass (V, \vee, \wedge) ein Verband ist mit $\max(V) = 1$ und $\min(V) = 0$.
 - (a) Geben Sie die Hasse-Diagramme aller Verbände mit 0, 1, 2, 3, 4, 5 Elementen an. (Bis auf Isomorphie) (Hinweis: Es gibt 5 Verbände mit 5 Elementen.)
 - (b) Geben Sie für jeden Ihrer Verbände alle minimalen Erzeugendensysteme an.
 - (c) Definieren Sie „ V ist freier Verband“. Sei V_n der von n Elementen frei erzeugte Verband. Beschreiben Sie V_1 und V_2 .
 - (d) Gibt es einen 4-elementigen Verband, der frei ist? Beweisen Sie für jeden nicht freien 4-elementigen Verband, dass er nicht frei ist.
 - (e) Geben Sie für jeden 5-elementigen $\{0, 1\}$ -Verband alle minimalen Erzeugendensysteme an.

2. Wir betrachten hier abelsche Gruppen, die wir allerdings in dieser Aufgabe immer multiplikativ schreiben. Die zyklische Gruppe mit n Elementen nennen wir C_n . Ein Hinweis zu (c) und (e): Überlegen Sie, was Sie über die Anzahl der Nullstellen des Polynoms $x^n - 1$ in einem Körper wissen.
 - (a) Beschreiben Sie (bis auf Isomorphie) alle abelschen Gruppen $(G, \cdot, 1, {}^{-1})$ mit genau 24 Elementen.
 - (b) Geben Sie für jede Gruppe G aus der vorigen Aufgabe und für jede Zahl $n = 1, \dots, 6$ an, wie viele Elemente der Ordnung n es in G gibt.
 - (c) Geben Sie für jede abelsche Gruppe G mit 24 Elementen und für jede Zahl $n = 0, \dots, 6$ an, wie viele Lösungen die Gleichung $x^n = 1$ in G hat.
 - (d) Beschreiben Sie die multiplikative Gruppe G eines Körpers mit 25 Elementen, und verwenden Sie (b), um zu beweisen, dass G tatsächlich Ihrer Beschreibung entspricht.
 - (e) Sei p eine Primzahl, und seien $k, l \geq 1$. Wie viele Lösungen hat die Gleichung $x^p = 1$ in C_{p^k} ? Wie viele Lösungen in $C_{p^k} \times C_{p^l}$?
 - (f) Beweisen Sie, dass die multiplikative Gruppe des 81-elementigen Körpers zyklisch ist. (Hinweis: (d).)

3. In dieser Aufgabe geht es um Körper K und ihre Automorphismengruppen $\text{Aut}(K)$. Wir schreiben $K[x]$ für den Polynomring über K , und $K(x)$ für seinen Quotientenkörper.
 - (a) Finden Sie alle Automorphismen des Körpers \mathbb{Q} .
 - (b) Finden Sie alle Automorphismen des Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
 - (c) Finden Sie alle Automorphismen des Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$.
(Hinweis: $\sqrt[3]{5} * \sqrt[3]{5} * \sqrt[3]{5} = 5$.)
 - (d) Finden Sie alle Automorphismen des Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{2}, \sqrt{10})$.
 - (e) Für welche Paare $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ gibt es einen Automorphismus $\varphi_{a,b}$ des Körpers $\mathbb{Q}(x)$, der x auf $a*x+b$ abbildet? Für welche Paare $(c, d) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ gibt es einen Automorphismus $\psi_{c,d}$ des Körpers $\mathbb{Q}(x)$, der x auf $1/(c*x+d)$ abbildet?
 - (f) Finden Sie einen Automorphismus von $\mathbb{Q}(x)$, der weder von der Form $\varphi_{a,b}$ noch von der Form $\psi_{c,d}$ ist.