Name: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

email: ______________________

(wenn nicht `e...@student.tuwien.ac.at`)

Prüfung ALGEBRA, 2019-10-29

Wann wollen Sie zur mündlichen Prüfung antreten?

- ○ heute abend
- ○ Donnerstag 31.10.
- ○ Montag 4.11.
- ○ Terminvereinbarung per e-mail an `goldstern@tuwien.ac.at`

Hinweise

Bitte begründen Sie Ihre Antworten. (Außer wenn in der Angabe explizit steht, dass keine Begründung notwendig ist.)

Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung zitieren, geben Sie den Wortlaut des Satzes an, und nicht nur den Namen. Überprüfen Sie auch, ob die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind.

Wenn explizit nach einem Beweis eines Satzes aus der VO (oder eines Spezialfalls) gefragt ist, genügt es nicht, den Satz zu zitieren. Wenn die Frage etwa lautet „Beweisen Sie, dass der Vektorraum der Polynome eine Basis hat“, genügt es **NICHT**, mit „Jeder VR hat eine Basis“ zu antworten.

„Beschreiben Sie das Objekt (die Menge, die Struktur) X“ bedeutet: Geben Sie alle wichtigen Eigenschaften von X an; dies heißt insbesondere:

- Wenn X isomorph zu einer wohlbekannten Struktur ist, oder es eine natürliche Bijektion zwischen X und einer wohlbekannten Struktur gibt (oder sogar einen Isomorphismus — in welchem Sinn? Als Gruppe, als Ring, als Vektorraum, . . . ?), dann geben Sie diese Struktur und die Bijektion an. (Damit sind meistens die folgenden Punkte auch schon erledigt.)
- Geben Sie an, was die Elemente oder Komponenten von X sind.
- Wenn X eine endliche oder abzählbare Menge ist, geben Sie die Elemente von X an, zum Beispiel in Form einer (abgebrochenen) systematischen Aufzählung.
- Wenn X eine Klasse von Algebren ist, und Sie X „bis auf Isomorphie“ angeben sollen, dann ist nach einer (endlichen oder unendlichen) **Liste** mit folgenden Eigenschaften gefragt: Jedes Element der Liste ist in X; umgekehrt ist jedes Element von X zu GENAU EINEM Element der Liste isomorph. (Insbesondere dürfen zwei verschiedene Elemente Ihrer Liste nicht isomorph sein.)
- Geben Sie jedenfalls an, ob es **endlich oder unendlich** viele sind; wenn endlich, dann geben Sie auch die **Anzahl der Elemente** oder zumindest gute untere und obere Schranken für die Anzahl an. (Sie müssen keine numerischen Rechnungen mit Zahlen über 30 durchführen; statt der Antworten 120 und 1024 würden auch die Antworten 5! und 2^{10} genügen.)

  (**Auch wenn Ihre Liste nur 3 oder 4 Strukturen enthält, geben Sie bitte explizit die Anzahl an.**)
- Wenn X eine Algebra oder ein relationales System ist, beschreiben Sie die Struktur von X. Ist X eine Gruppe, ein Körper, eine lineare Ordnung? (Wenn aber z.B. nach einer Beschreibung des Körpers K gefragt wird, müssen Sie natürlich nicht extra erwähnen, dass K Körper ist. Oder dass jeder Körper automatisch ein Ring ist.)

1. (a) Sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen. Finden Sie zwei verschiedene Unterkörper K_1, K_2 von $\mathbb{C}$, die isomorph sind. Geben Sie ein Element von $(K_1 \setminus K_2) \cup (K_2 \setminus K_1)$ an. Beschreiben Sie einen Isomorphismus von K_1 nach K_2.

   (b) Sei K ein Körper mit 5 Elementen, $K[x,y] = (K[x])[y]$ der Polynomring (mit Polynomen in 2 Variablen) über K. Sei L der Quotientenkörper von $K[x,y]$. Finden Sie erstens einen nichttrivialen Ringautomorphismus von $K[x,y]$, und zweitens einen nichttrivialen Körperautomorphismus von L.

   (c) Sei L ein Körper, und seien $K_1 \simeq K_2$ endliche Unterkörper von L. Zeigen Sie, dass $K_1 = K_2$ gelten muss.

   (d) Finden Sie Körper K_1, K_2, L (nicht notwendigerweise verschieden), die die folgenden Eigenschaften haben: K_1 ist Unterkörper von L; K_2 ist Unterkörper von L; es gibt mindestens 2 (verschiedene) Isomorphismen $f : K_1 \to K_2$ und $g : K_1 \to K_2$; L hat Charakteristik 0.

   (e) Das Gleiche noch einmal, aber L soll jetzt Charakteristik $p > 0$ haben.

2. Sei $\mathscr{Gr}$ die Klasse aller Gruppen $(G, +, 0, -)$, $\mathscr{Ab}$ die Unterklasse aller abelschen Gruppen, und sei $\mathscr{E}$ die Klasse aller Algebren in $\mathscr{Ab}$, in denen das Gesetz $\forall x\ (x + x + x = 0)$ gilt.

   (a) Finden Sie (bis auf Isomorphie) alle abelschen Gruppen mit höchstens 10 Elementen. (Sie müssen nicht beweisen, dass verschiedene Gruppen auf Ihrer Liste nicht isomorph sind, und auch nicht, dass Ihre Liste vollständig ist.)

   (b) Finden Sie alle Gruppen in $\mathscr{E}$ mit höchstens 10 Elementen, sowie eine weitere Gruppe in $\mathscr{E}$.

   (c) Beschreiben Sie die Gruppe G_2, die in $\mathscr{Gr}$ von 2 Elementen frei erzeugt wird.

   (d) Beschreiben Sie die Gruppe E_2, die in $\mathscr{E}$ von 2 Elementen frei erzeugt wird. Wie viele Elemente hat sie? (Hinweis: E_2 ist endlich.)

   (e) F_2 und E_2 wurden schon definiert. A_2 sei die von 2 Elementen frei erzeugte abelsche Gruppe.

   Geben Sie für jede Gruppe $X \in \{E_2, A_2, G_2\}$ und für jede Gruppe $Y \in \{E_2, A_2, G_2\}$ an, wie viele Gruppenhomomorphismen $f : X \to Y$ es gibt:

   - endlich oder unendlich viele?
   - wenn endlich viele: wie viele?

	$Y = E_2$	$Y = A_2$	$Y = G_2$
$X = E_2$			
$X = A_2$			
$X = G_2$			