# Gödels konstruktibles Universum

Martin Goldstern

15. Dezember 2006

## 1 Mengentheoretische Axiome

Das Universum aller Mengen wird durch die ZFC-Axiome beschrieben. Die meisten dieser Axiome sind eigentlich „Postulate“; sie *fordern* die Existenz gewisser Mengen. So wie man in der axiomatischen Geometrie verlangt, dass es zu je zwei Punkten eine Gerade gibt, die beide Punkte enthält, verlangt das „Paarmengenaxiom“, dass es für je zwei Mengen $x$ und $y$ eine Menge gibt, die beide enthält:

$$\forall x\, \forall y\, \exists P\, (x \in P \wedge y \in P)$$

oder in einer schärferen Version, dass es eine Menge gibt, die *nur* $x$ und $y$ enthält:

$$\forall x\, \forall y\, \exists P\, \forall z (z \in P \leftrightarrow z = x \vee z = y)$$

Weitere Axiome/Postulate fordern

- die Existenz der Potenzmenge jeder Menge (also: zu jeder Menge $A$ gibt es eine Menge $B$, die [genau] die Teilmengen von $A$ enthält),
- die Existenz der Vereinigungsmenge einer Familie von Mengen (oder Menge von Mengen)
- sowie die Existenz einer unendlichen Menge.

Das unbeschränkte Komprehensionsprinzip, welches für jede Eigenschaft $E(\cdot)$ die Existenz einer Menge

$$\{x : E(x)\}$$

fordert, liefert einen Widerspruch, das Russell-Paradoxon: Es kann nämlich sicher keine Menge $R$ geben, die genau jene $x$ enthält, welche $x \notin x$ erfüllen. Die Intuition der meisten Mengentheoretiker führt diesen Widerspruch auf die enorme „Größe“ der postulierten Menge zurück; die Doktrin der „limitation of size“ verlangt, dass nur die Existenz „halbwegs kleiner“ Mengen postuliert werden darf.

Daher beschränkt man sich auf eine schwächere Variante, das „Aussonderungsaxiom“: Zu jeder Menge $A$ und jeder Eigenschaft $E(\cdot)$ gibt es eine Menge $B$, die genau die Mengen $x \in A$ enthält, die $E(x)$ erfüllen. Eine stärkere Variante des Aussonderungsaxioms ist das „Ersetzungsaxiom“: Für jede Menge $A$ und jede „Abbildungsvorschrift“[1] $F$ gibt es eine Menge, die genau alle $F(a)$ mit $a \in A$ enthält.

Schließlich erklärt das Extensionalitätsaxiom eine weitere charakteristische Eigenschaft von Mengen: Zwei Mengen sind (genau) dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. (Insbesondere kann es also nur eine einzige leere Menge geben.)

Die genannten Axiome[2] werden nach Ernst Zermelo und Abraham Fraenkel **ZF-Axiome** genannt. Zusammen mit dem Auswahlaxiom AC bilden sie das System ZFC.

[1] Dies kann leicht formalisiert werden: eine Abbildungsvorschrift ist einfach eine Formel $\varphi(x, y)$, für die man $\forall x \in A\, \exists! y\, \varphi(x, y)$ voraussetzt. Für das eindeutig bestimmte $y$ mit $\varphi(x, y)$ schreibt man $F(x)$.

[2] Ein weiteres Axiom, das „Regularitäts-“ oder „Fundierungsaxiom“, übergehe ich hier, da es in der Mathematik außerhalb der eigentlichen Mengenlehre so gut wie nie gebraucht wird.

Es hat sich gezeigt, dass diese Axiome ausreichen, um praktisch alle mathematischen Konstruktionen durchzuführen. Die reellen Zahlen kann man zum Beispiel via Dedekind-Schnitte durch Mengen rationaler Zahlen repräsentieren, die rationalen Zahlen sind (als Quotientenkörper) Äquivalenzklassen von Paaren ganzer Zahlen, diese erhält man ähnlich aus den natürlichen Zahlen, und letztere kann man zum Beispiel durch die Mengen $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, etc. darstellen.

Noch wichtiger ist aber die Erfahrungstatsache, dass die ZFC-Axiome fast alle[3] in der Mathematik betrachteten Sätze entscheiden (also beweisen oder widerlegen) können; jedenfalls sind die anerkannten Beweise so gut wie immer (natürlich nur im Prinzip) auf ZFC-Axiome zurückführbar.

Diese „Erfahrungstatsache“ gilt allerdings nicht in der Mengenlehre selbst, wo die Unvollständigkeit der ZFC-Axiome eine wichtige Rolle spielt. Dies bedeutet, dass es (mengentheoretische) Aussagen gibt, die von ZFC weder bewiesen noch widerlegt werden können. Die historisch erste und wohl wichtigste solche Aussage ist die Kontinuumshypothese CH, die eine Antwort auf die Frage „Wie viele reelle Zahlen gibt es?“ gibt. Kurt Gödel hat 1938 in [4] mit Hilfe seines „konstruktiblen Universums“ gezeigt, dass CH von den ZFC-Axiomen nicht widerlegt werden kann (dass also die Negation von CH nicht beweisbar ist); Paul Cohen hat 1963 mit der Erfindung der „forcing“-Methode gezeigt, dass CH auch nicht beweisbar ist.

Gödels Grundidee war die folgende: In jedem Universum $V$ der Mengenlehre (also in jeder Struktur, die die ZFC-Axiome erfüllt) kann man ein Unteruniversum $L$ finden, welches ZFC erfüllt, aber nur jene Mengen enthält, deren Existenz auf Grund der ZFC-Axiome absolut notwendig ist, sozusagen das von der leeren Menge (oder genauer: von den Ordinalzahlen) „erzeugte“ Universum. Dieses Universum $L$ hat eine sehr übersichtliche Struktur, da man den Prozess, der die Elemente von $L$ erzeugt, gut kontrollieren kann. Daher kann man auch „berechnen“, wie viele „konstruktible“ reelle Zahlen es gibt.

# 2 Wohlordnung und $\omega_1$

Eine *Wohlordnung* ist eine lineare Ordnung, in der jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element hat. Wohlordnungen erlauben es, die von den natürlichen Zahlen bekannten „induktiven“ Definitionen und Konstruktionen auch ins Transfinite fortzusetzen. In einer induktiven Definition einer Funktion, deren Definitionsbereich $\mathbb{N}$ sein soll, „darf“ man bei der Definition des Wertes an der Stelle $n$ bereits die Kenntnis aller Werte an früheren Stellen voraussetzen; man darf also

$$f(n) := H(\langle f(0), \dots, f(n-1) \rangle)$$

für eine beliebige Funktion $H$ setzen[4] und weiß, dass trotz der scheinbaren Zirkularität der Definition, in der die zu definierende Funktion nicht nur links sondern auch rechts auftritt, es eine eindeutige bestimmte Funktion $f$ gibt, die die obige Definition erfüllt.

Ein analoger Satz charakterisiert[5] die Wohlordnungen; für jede Wohlordnung $(W, \leq)$ und jede beliebige Vorschrift $H$[6] gibt es genau eine Funktion $f$, die auf ganz $W$ definiert ist, und für alle $w \in W$ die Eigenschaft

$$(*) \qquad\qquad f(w) = H(\langle f(v) : v < w \rangle)$$

erfüllt.[7]

[3]Dies ist die subjektive Einschätzung des Autors

[4]Mit $\langle a, b, \dots \rangle$ bezeichnen wir die endliche oder unendliche Folge der Objekte $a, b, \dots$.

[5]Wir interessieren uns hier nur für die eine Implikation; es gilt auch die folgende Umkehrung: wenn $(W, \leq)$ keine Wohlordnung ist, dann gibt es eine Funktion $H$, sodass keine Funktion $f$ die Rekursion $(*)$ erfüllt.

[6]Falls $H$ auf einem zu kleinen Definitionsbereich definiert sein sollte, vereinbaren wir, dass für alle $s \notin \mathrm{dom}(H)$ der Ausdruck $H(s)$ als 0 gelesen werden soll.

[7]Mit $\langle f(v) : v < w \rangle$ ist hier die (im Allgemeinen unendliche) Folge von Funktionswerten von $f$ gemeint, die zu Argumenten $< w$ gehören; eine alternative Schreibweise wäre $f \restriction \{v : v < w\}$.

## „Initiale“ Wohlordnungen

Eine Wohlordnung $(W, \leq)$ heißt „initial“, wenn sie zu keinem Anfangsabschnitt $W_{x<w_0} := \{x \in W : x < x_0\}$ gleichmächtig[8] ist. Wenn $(W, \leq)$ nicht initial ist, so sei $w^*$ das kleinste Element mit $W \approx W_{<w^*}$. Die Wohlordnung $(W_{<w^*}, \leq)$ ist dann initial; wegen $W \approx W_{<w^*}$ lässt sich auch $W$ initial wohlordnen.

## Beispiel einer transfiniten Konstruktion

Mit transfiniter Induktion entlang einer initialen Wohlordnung von $\mathbb{R}^3$ kann bewiesen werden, dass der dreidimensionale Raum sich als disjunkte Vereinigung von kongruenten Kreisen (oder anderen Figuren) schreiben lässt.

Die Kardinalität von $\mathbb{R}$ heißt auch „das Kontinuum“. Wir werden eine initiale Wohlordnung verwenden; daher hat jeder Anfangsabschnitt unserer Wohlordnung weniger als Kontinuum viele Elemente.

Zunächst überlegt man, dass $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}^2$ (daher auch zu $\mathbb{R}^3$) gleichmächtig ist. Man kann sogar abzählbare Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine stetige Bijektion $f : \mathbb{R} \setminus A \to \mathbb{R}^2 \setminus B$ explizit angeben. Insbesondere gibt es also Kontinuum viele Punkte im $\mathbb{R}^3$, und auch Kontinuum viele Ebenen durch jeden Punkt.

Sei nun $(\mathbb{R}^3, \prec)$ eine initiale Wohlordnung.

Wir definieren eine Familie $(C_r : r \in \mathbb{R}^3)$ von kongruenten Kreisen mit folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $r \in \mathbb{R}^3$: $r \in C_r \subseteq \mathbb{R}^3$
2. Für alle $r, s \in \mathbb{R}^3$: $C_r \neq C_s \Rightarrow C_r \cap C_s = \emptyset$

Wenn wir den Kreis $C_r$ definieren, dürfen wir annehmen, dass $(C_s : s \prec r)$ schon definiert ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Wenn $r \in \bigcup_{s \prec r} C_s$ liegt, sei $C_r := C_s$ für jenes $s$ mit $r \in C_s$.
- Wenn nicht, dann wählen wir eine Ebene $E$, die zwar den Punkt $r$ enthält, aber keinen Kreis $C_s$ mit $s \prec r$ ganz enthält. (So eine Ebene gibt es, denn die bisherigen Kreise spannen ja weniger als Kontinuum viele Ebenen auf.)

  Die Ebene $E$ enthält also von jedem Kreis $C_s$, $s \prec r$, höchstens 2 Punkte. Unter allen zu $C$ kongruenten Kreisen in $E$, die durch den Punkt $r$ gehen, gibt es also weniger als Kontinuum viele, die einen der $C_s$, $s \prec r$, treffen; wir wählen als $C_r$ einen Kreis in $E$, der $r$ enthält und zu allen früheren $C_s$ disjunkt ist.

## $\omega$ und $\omega_1$

Die natürlichen Zahlen sind bis auf Isomorphie die einzige Wohlordnung $(W, \leq)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $W$ ist unendlich
2. Für alle $x \in W$ ist $\{y \in W : y < x\}$ endlich

Die zweite Eigenschaft besagt, dass jede beschränkte Menge endlich ist. Überdies gelten auch die folgenden Aussagen:

3. Jede endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist beschränkt.
4. Jede unendliche (=unbeschränkte) Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ ist gleichmächtig mit $\mathbb{N}$ selbst, und es gibt sogar einen eindeutig bestimmten Ordnungsisomorphismus $f_A : \mathbb{N} \to A$, der auch durch $f_A(n) = \min(A \setminus \{f_A(k) : k < n\})$ charakterisiert wird.

[8] Zwei Mengen $A$ und $B$ heißen gleichmächtig ($A \approx B$), wenn es eine Bijektion zwischen ihnen gibt. (Diese Bijektion ist im Allgemeinen nicht strukturerhaltend.)

5. Jede unendliche Wohlordnung $W$, die nicht isomorph zu den natürlichen Zahlen ist, muss ein $x_0 \in W$ enthalten, sodass $W_{<x_0}$ isomorph zu den natürlichen Zahlen ist, nämlich $x_0 := \min\{y : W_{<y} \text{ unendlich}\}$.

Analog definieren wir, dass eine unendliche Wohlordnung $(W, \leq)$ vom *Typ* $\omega_1$ ist, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

1. $W$ ist überabzählbar.

2. Für alle $x \in W$ ist $\{y \in W : y < x\}$ abzählbar.[9]

In der Mengenlehre wird eine spezielle Wohlordnung vom Typ $\omega_1$ ausgezeichnet, die als Repräsentant ihrer Isomorphieklasse dient; sie heißt dann einfach $\omega_1$.

Auch die oben genannten weiteren Eigenschaften von $\mathbb{N}$ haben ihre natürlichen Analogien:

3. Jede abzählbare Teilmenge von $\omega_1$ ist beschränkt.

4. Jede überabzählbare (=unbeschränkte) Teilmenge $A \subseteq \omega_1$ ist gleichmächtig mit $\omega_1$ selbst, und es gibt sogar einen eindeutig bestimmten Ordnungsisomorphismus $f_A : \omega_1 \to A$, der auch durch $f_A(w) = \min(A \setminus \{f_A(v) : v < w\})$ charakterisiert wird.

5. Jede überabzählbare Wohlordnung $W$, die nicht isomorph zu $\omega_1$ ist, muss ein $x_0 \in W$ enthalten, sodass $W_{<x_0}$ isomorph zu $\omega_1$ ist, nämlich $x_0 := \min\{y : W_{<y} \text{ überabzählbar}\}$.

## Vergleichbarkeit von Wohlordnungen; Nachfolger

Für beliebige nichtisomorphe Wohlordnungen $\alpha$ und $\beta$ muss stets gelten, dass eine der beiden (etwa $\alpha$) zu einem Anfangsabschnitt der anderen (also $\{y \in \beta : y < y_0\}$) isomorph ist. Wir schreiben in diesem Fall $\alpha < \beta$.

Wenn $(I, \leq)$ eine Wohlordnung ist, verstehen wir unter $I + 1$ eine Wohlordnung von $I \cup \{\infty\}$ mit einem beliebigen Objekt $\infty \notin I$, die die Wohlordnung auf $I$ fortsetzt und $i < \infty$ für alle $i \in I$ erfüllt. Wohlordnungen der Form $I+1$ sind offenbar genau jene Wohlordnungen, die ein maximales Element haben.

## Ordinalzahlen

Eine Menge $A$ heißt *transitiv*, wenn $\forall x \in y \in A$ auch $x \in A$ gilt, oder äquivalent $\bigcup_{y \in A} y \subseteq A$. Die später betrachteten Mengen $L_\alpha$ sind alle transitiv.

Eine Menge $\alpha$ heißt Ordinalzahl, wenn sie erstens durch die Relation $x \leq y \leftrightarrow x = y \vee x \in y$ wohlgeordnet wird und zweitens „transitiv" ist. Beispiele für Ordinalzahlen sind

- Die Menge $3 = \{0, 1, 2\}$

- Die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$; in der Mengenlehre nennt man diese Menge meist $\omega$.

- Die Mengen $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$ und $\omega + 2 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1\}$ sowie die analog definierten Mengen $\omega + n$, für alle $n \in \omega$

- Die Menge $\omega + \omega = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$.
  Diese Menge ist (wie auch die vorigen) abzählbar.

- $\omega_1$ ist die kleinste überabzählbare Ordinalzahl. Die Elemente von $\omega_1$ sind genau die abzählbaren Ordinalzahlen.

Man kann zeigen, dass jede Wohlordnung zu genau einer Ordinalzahl isomorph ist. Die Ordinalzahlen bilden somit ein Repräsentantensystem für Isomorphieklassen von Wohlordnungen.

[9] mit „abzählbar" ist in diesem Artikel immer „höchstens abzählbar", also „endlich oder abzählbar unendlich" gemeint.

# 3 Wohlordnung des Kontinuums

Cantor prägte 1878 in seiner Arbeit [3] den Begriff der "Mächtigkeit" einer Menge; bereits in [2] hatte er bewiesen, dass die reellen Zahlen überabzählbar sind. In [3] stellt er auch folgende Frage:

> ... fragt es sich, in *wie viel* und in welche Klassen die linearen Mannigfaltigkeiten[10] zerfallen, wenn Mannigfaltigkeiten von gleicher Mächtigkeit in eine und dieselbe Klasse, Mannigfaltigkeiten von verschiedener Mächtigkeit in verschiedene Klassen gebracht werden.

Weiters behauptet er

> Durch ein Inductionsverfahren, auf dessen Darstellung wir hier nicht näher eingehen, wird der Satz nahe gebracht, dass die Anzahl der nach diesem Eintheilungsprinzip sich ergebenden Klassen eine endliche, und zwar, dass sie gleich zwei ist. [...] Eine genaue Untersuchung dieser Frage verschieben wir auf eine spätere Gelegenheit.

Diese Vermutung:

(CH) Jede Teilmenge von $A \subseteq \mathbb{R}$ ist entweder abzählbar oder gleichmächtig mit der ganzen Menge $\mathbb{R}$

wurde später „Kontinuumshypothese“ genannt. Als Motivation für die Kontinuumshypothese kann die Tatsache dienen, dass man keine solche Menge intermediärer Kardinalität finden konnte, und (zumindest rückblickend) dass man von vielen einfach definierbaren Mengen eine noch stärkere Eigenschaft beweisen kann. Der Satz von Cantor-Bendixson besagt, dass jede überabzählbare abgeschlossene Teilmenge der reellen Zahlen die Vereinigung einer abzählbaren mit einer perfekten Menge ist; jede perfekte Menge enthält aber eine Kopie der Cantormenge und ist somit gleichmächtig mit $\mathbb{R}$. Man kann auch zeigen, dass die Borelmengen (und auch noch komplizierteren Mengen) diese „perfect set property“ besitzen: jede überabzählbare Borelmenge enthält eine perfekte Menge und ist daher ebenfalls gleichmächtig mit $\mathbb{R}$.

David Hilbert wählte die Frage nach der Kardinalität des Kontinuums als die erste in seiner berühmten Liste von 23 Problemen. Gewissermaßen als Fußnote fragt Hilbert auch, ob oder wie die reellen Zahlen wohlgeordnet werden können.

Diese letzte Frage wurde bereits 1904 von Zermelo in [7] beantwortet. Unter der Voraussetzung, dass $F : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, die jeder nichtleeren Menge von reellen Zahlen eines ihrer Elemente zuordnet, kann man eine explizite Wohlordnung auf den reellen Zahlen definieren. (Die Definition der Wohlordnung verwendet natürlich den Parameter $F$.) Die Existenz einer solchen Funktion $F$ folgt (zumindest nach Meinung vieler Mathematiker) unmittelbar aus der Anschauung; in einem formalen Zugang wird die Existenz einer solchen Funktion durch das Auswahlaxiom gefordert (oder, je nach Anschauung, „behauptet“ oder auch „garantiert“).

Wie oben erwähnt, hat jede Wohlordnung $W$ vom Typ $\omega_1$ die in der Kontinuumshypothese beschriebene Eigenschaft (d.h., dass also jede überabzählbare Teilmenge mit $W$ gleichmächtig ist). Man zeigt auch leicht (ohne Auswahlaxiom), dass eine wohlordenbare Menge genau dann diese Eigenschaft hat, wenn sie im Typ $\omega_1$ wohlgeordnet werden kann. Unter Voraussetzung einer Wohlordnung der reellen Zahlen (heutzutage scheint diese Voraussetzung nicht mehr erwähnenswert, aber für Hilbert war sie keineswegs selbstverständlich) kann man die Kontinuumshypothese also auch so formulieren:

(CH) Die reellen Zahlen lassen sich im Typ $\omega_1$ wohlordnen.

# 4 Definierbarkeit

Was bedeutet es, dass eine Menge (etwa von natürlichen Zahlen) „definierbar“ ist? Jeder wird zustimmen, dass etwa die Menge $\{1, 14, 141, 1414, 14142, 141421, \ldots\}$, in der Anfangsabschnitte der

[10] In heutiger Sprechweise: unendliche Mengen reeller Zahlen

dezimalen Entwicklung von $\sqrt{2}$ aufgelistet werden, dieses Prädikat verdient, da wir ja eine explizite Definition angeben können[11]. Aber wie kann man von einer Menge zeigen, dass sie *nicht* definierbar ist? Wie kann man eine undefinierbare Menge angeben? Gibt es solche Mengen überhaupt?

Es scheint offensichtlich, dass nur abzählbar viele Mengen definierbar sind, und da es überabzählbar viele Teilmengen der natürlichen Zahlen gibt, muss es darunter wohl auch undefinierbare geben.

Das folgende Beispiel, auch Richard-Paradoxon genannt, zeigt, dass all zu naive Überlegungen in diese Richtung leicht einen Widerspruch erzeugen können:

> Es gibt nur endlich viele „kurze“ Beschreibungen, das seien Beschreibungen, die mit höchstens 1000 Buchstaben auskommen. Also gibt es nur endlich viele natürliche Zahlen, die kurz beschrieben werden können. Sei $n_0$ die kleinste Zahl, die nicht kurz beschrieben werden kann.

Aber gerade habe ich $n_0$ mit weniger als 1000 Buchstaben beschrieben. Seltsam...

Eine als Rätsel formulierte Variante des Paradoxons deutet auch schon an, wie das Paradoxon gelöst werden kann:

> Was ist die größte Zahl, die mit 3 Buchstaben beschrieben werden kann?

Die naive Antwort lautet „elf“, aber mit geeigneten Sprachkenntnissen kann man dies leicht übertrumpfen. Im Polnischen hat „sto“ (100) nur 3 Buchstaben, im Hebräischen ist sogar 1000 = אלף („elef“), und wenn man auch römische Zahlzeichen zulässt, erhält man mit MMM=3000 eine noch größere Zahl. Hier sehen wir aber, dass schon die Angabe ungenau war: wann immer man von einer „Beschreibung“ spricht, muss man explizit die Sprache spezifizieren, in der diese Beschreibung gehalten sein soll.

Bei einer mathematischen Beschreibung muss diese Sprache und ihre Semantik auch mathematisch spezifiziert werden; das Richard-Paradoxon zeigt, dass so eine Spezifikation niemals in der Sprache selbst erfolgen kann, sondern nur in einer „Metasprache“.

Die unten stehende Gödelsche Konstruktion kann so interpretiert werden, dass man zu einer vorgegebenen Sprache nicht nur eine Metasprache, sondern auch eine Meta-Meta-Sprache, eine Meta$^3$-Sprache, etc bildet, und diesen Prozess auch noch transfinit oft iteriert.

Am Richard-Paradoxon sehen wir, dass der naive Begriff der Definierbarkeit[12] nicht so leicht befriedigend formalisiert werden kann. Im Folgenden gebe ich eine (relativ schwache) mögliche Formalisierung des Definierbarkeitsbegriffs an, nämlich die „Definierbarkeit in der Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe mit Parameter“. Dieser Begriff erweist sich als praktisches Hilfsmittel in der Konstruktion des Gödelschen Universums, auch wenn viele intuitiv definierbare Mengen in diesem Sinn nicht definierbar sind.

Sei $A$ eine beliebige Menge, dann bezeichnen wir mit $\mathscr{D}(A) \subseteq \mathscr{P}(A)$ die Menge aller jenen Teilmengen von $A$, die in der relationalen Struktur $(A, \in)$ definierbar sind, also Mengen der Form $\{x \in A : \varphi(x)\}$, mit einer beliebigen Formel $\varphi$. Wir beschränken uns hier auf Formeln in der Prädikatenlogik erster Stufe mit Parametern aus $A$. Das heißt, dass in solchen Definitionen Formeln verwendet werden dürfen, die (endlich viele) Elemente aus $A$ erwähnen, die weiters die Zeichen $\in$ und $=$ sowie die logischen Junktoren $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \ldots$ enthalten dürfen, und in denen alle Quantoren $\forall x$ und $\exists x$ sich nur auf Elemente (und nicht etwa Teilmengen) von $A$ beziehen.

Für $a \in A$ definiert die Formel $x = a$ also die Menge $\{x \in A : x = a\} = \{a\}$. Da die definierbaren Teilmengen von $A$ sicher eine Boolesche Algebra bilden, sind somit auch alle endlichen Teilmengen definierbar.

Die Formel $x \in a$ definiert die Menge $\{x \in A : x \in a\} = A \cap a$. Wenn $A$ transitiv ist, dann gilt $A \cap a = a$ für alle $a \in A$, somit ist $A \subseteq \mathscr{D}(A)$.

Die Formel $x = x$ definiert die Menge $\{x \in A : x = x\} = A$, daher gilt $A \in \mathscr{D}(A)$.

[11] Zum Beispiel: $\{n \in \mathbb{N} : \exists k\, (n^2 < 2 * 10^{2k} < (n+1)^2)\}$

[12] Im Gegensatz etwa zum naiven Begriff der *Berechenbarkeit* einer Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; für letzteren gibt es gleich mehrere mögliche natürliche Definitionen, die immer wieder auf den selben Begriff führen.

**Beispiele**

Um den Begriff der erststufigen Definierbarkeit besser einordnen zu können, mag das folgende Beispiel hilfreich sein. Statt der Sprache der Mengenlehre, in der als einziges nichtlogisches Symbol das Relationssymbol $\in$ vorkommt, verwende ich hier die vertrautere Sprache der Körper, in der als nichtlogische Zeichen die zweistelligen Funktionssymbole $+$ und $*$ vorkommen, weiters das einstellige Funktionssymbol $-$ und die Konstanten 0 und 1:

1. Im Körper $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ der reellen Zahlen ist die Menge der positiven Zahlen definierbar, zum Beispiel durch die Formel $\neg(x = 0) \wedge \exists y : (x = y * y)$.

2. Im Ring $(\mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1)$ der ganzen Zahlen ist die Menge der positiven Zahlen definierbar. Der naive Versuch „$x$ ist ein Element der von 1 erzeugten Unterhalbgruppe“ führt zwar nicht zu einer Formel in der Prädikatenlogik erster Stufe. Nach dem Satz von Lagrange sind aber die positiven ganzen Zahlen genau jene ganzen Zahlen, die sich als Summe von 4 Quadraten ganzer Zahlen schreiben lassen (und ungleich 0 sind); diese Eigenschaft lässt sich leicht in eine erststufige Formel fassen.

3. Im Körper $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ der reellen Zahlen ist die Menge der natürlichen Zahlen (und daher auch die Menge der ganzen Zahlen) nicht definierbar.
(Das ist nicht trivial. Man kann diese Aussage als Korollar zweier Sätze von Gödel und Tarski erhalten: Gödel hat gezeigt, dass die Menge der in $\mathbb{N}$ gültigen Formeln sehr kompliziert und insbesondere unentscheidbar ist, während Tarski ein Verfahren angegeben hat, das die Gültigkeit beliebiger Formeln in $\mathbb{R}$ entscheiden kann.)

## Variante: Gödel-Operationen

Die folgende alternative Konstruktion vermeidet (scheinbar) den Begriff der Definierbarkeit: Für jede Menge $A$ sei $\mathscr{G}(A)$ die kleinste Menge, die $A \subseteq \mathscr{G}(A)$ erfüllt und unter den folgenden 10 Operationen abgeschlossen ist:

$$\begin{array}{rlrlrl} G_1(a,b) = & \{a,b\} & G_2(a,b) = & a \times b & G_3(a,b) = & \in\restriction(a \times b) \\ G_4(a,b) = & a \setminus b & G_5(a,b) = & a \cap b & G_6(a) = & \bigcup a \\ G_7(a) = & \mathrm{dom}(a) & G_8(a) = & \sigma_{21}(a) & & \\ G_9(a) = & \sigma_{132}(a) & G_{10}(a) = & \sigma_{231}(a) & & \end{array}$$

wobei

- $\in\restriction a \times b := \{(x,y) : x \in a, y \in b, x \in y\}$
- $\sigma_{12}(a) := \{(x,y) : (y,x) \in a\}$,
- $\sigma_{132}(a) = \{(x,z,y) : (x,y,z) \in a\}$,
- $\sigma_{231}(a) = \{(y,z,x) : (x,y,z) \in a\}$.

Dann kann man (mit Induktion über die Komplexität von Formeln) zeigen, dass $\mathscr{D}(A)$ genau jene Teilmengen von $A$ enthält, die in $\hat{\mathscr{G}}(A) := \mathscr{G}(A \cup \{A\})$ liegen,[13] also $\mathscr{D}(A) = \hat{\mathscr{G}}(A) \cap \mathscr{P}(A)$. Die Konstruktion mit diesen zehn „Gödeloperationen“ ist zwar elementarer als der Zugang über Definierbarkeit, in der Praxis ist es aber sehr mühsam, tatsächlich Gödeloperationen zu finden. (Man versuche etwa, nachzurechnen, dass für beliebige Mengen $A$ die Menge $S = \{\{a\} : a \in A\}$ aller Singletons in $\hat{\mathscr{G}}(\hat{\mathscr{G}}(A))$ liegt. Dass sie in $\mathscr{D}(\mathscr{D}(A))$ liegt, kann man leicht durch eine Definition belegen, die nur den Parameter $A \in \mathscr{D}(A)$ verwendet, wie etwa die folgende

$$S = \{X \in \mathscr{D}(A) : \exists y \, (y \in A \wedge X = \{y\})\}$$

[13] Man beachte, dass hier nicht nur Elemente von $A$ sondern auch $A$ selbst als Parameter der Gödelfunktionen zugelassen wird. Die Verwendung von $A$ selbst kann als Übergang von der Sprache zu einer Metasprache gedeutet werden, und ist auch verantwortlich dafür, dass $\hat{\mathscr{G}}(\hat{\mathscr{G}}(A))$ eine echte Obermenge von $\hat{\mathscr{G}}(A)$ ist.

wobei $X = \{y\}$ eine Abkürzung für $y \in X \wedge \forall z\,(z \in X \to z = y)$ ist.)

In jedem Fall ist aber klar, dass für abzählbare Mengen $A$ auch die Menge $\hat{\mathscr{G}}(A)$ abzählbar ist. Wir können nämlich die Menge aller iterierten Gödeloperationen (wie z.B. die Abbildung, die $(x, y, z)$ auf $G_1(G_2(z, G_{10}(x)), y)$ abbildet) in einer abzählbaren Liste $G_1, G_2, \ldots, G_{10}, G_{11}, \ldots$ anordnen (indem wir zB Terme für diese Iterationen zunächst nach ihrer Länge und dann lexikographisch ordnen); jedes Element von $\hat{\mathscr{G}}(A)$ ist dann von der Form $G_n(a_1, \ldots, a_k)$ für ein $n, k \in \mathbb{N}$ mit $a_1, \ldots, a_k$ in $A \cup \{A\}$. Mit $A$ sind aber auch $A \cup \{A\}$ und $\bigcup_j (A \cup \{A\})^j$ abzählbar.

### Konstruktion von $L$

Für jede Wohlordnung[14] $\alpha$ werden wir eine Menge $L_\alpha$ angeben; $L_\alpha$ sind dann die „in höchstens $\alpha$ Schritten konstruierbaren Mengen".

Wenn $\alpha$ die leere Wohlordnung ist, dann sei $L_\alpha = L_0 = \emptyset$.

Wir definieren $L_\alpha$ so: Wenn $\alpha = \beta + 1$, dann ist $L_\alpha = \mathscr{D}(L_\beta)$. Wenn $\alpha$ eine Wohlordnung ohne größtes Element ist, dann betrachten wir zunächst die Familie $(\alpha_{<x} : x \in \alpha)$ aller Anfangsabschnitte von $\alpha$; diese Familie induziert eine Kette $(L_{\alpha_{<x}} : x \in \alpha)$; wir setzten $L_\alpha$ gleich der Vereinigung dieser Kette.[15] Man zeigt leicht, dass die Folge der $L_\alpha$ monoton ist: Wenn $\alpha < \beta$, dann ist $L_\alpha \subseteq L_\beta$ (und auch $L_\alpha \in L_{\alpha+1} \subseteq \beta$).

So gilt zum Beispiel (wenn wir die natürliche Zahl $n$ als $n$-elementige Wohlordnung $\{0, \ldots, n-1\}$ auffassen)

$$L_0 = \emptyset \qquad\qquad L_{n+1} = \mathscr{D}(L_n) = \mathscr{P}(L_n)$$

für alle natürlichen Zahlen $n$. Also zum Beispiel hat $L_1 = \mathscr{P}(L_0) = \{\emptyset\}$ ein Element, und $L_2 = \mathscr{P}(L_1) = \{\emptyset, L_0\}$ hat zwei Elemente. $L_3 = \mathscr{P}(L_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{L_0\}, L_1\}$ hat vier Elemente.

Die Wohlordnung aller natürlichen Zahlen wird mit $\omega$ bezeichnet; nach Definition gilt dann $L_\omega = L_0 \cup L_1 \cup \cdots$.

Mit $L$ bezeichnen wir die Klasse aller Mengen, die in irgend einem $L_\alpha$ liegen. Diese Klasse ist bereits so groß, dass sie keine Menge mehr ist.

## 5 $L$ erfüllt ZF

Es ist klar, dass $L$ unter allen Gödeloperationen abgeschlossen ist; daraus kann man zum Beispiel folgern, dass das Paarmengenaxiom und das Vereinigungsmengenaxiom auch im Universum $L$ gelten.

Man kann nicht erwarten, dass mit jeder Menge $A \in L$ auch die Potenzmenge von $A$ in $L$ liegt. Dies ist aber gar nicht nötig, damit das Potenzmengenaxiom in $L$ erfüllt ist. Man muss nur zeigen, dass es für jede Menge $A \in L$ eine Menge $P \in L$ gibt, die genau aus jenen Teilmengen von $A$ besteht, die auch selbst in $L$ liegen.

Teil 1 des folgenden Lemma besagt also einfach, dass in $L$ das Potenzmengenaxiom gilt; Teil 2 ist entscheidend für den Beweis der Kontinuumshypothese:

**Lemma 1 (Kleine Potenzmenge)** *Sei $\alpha$ eine unendliche Wohlordnung, und $A \in L_\alpha$.*

1. *Dann gibt es eine Wohlordnung $\beta$ sodass $\mathscr{P}(A) \cap L \subseteq L_\beta$.*
   *(Da $\mathscr{P}(A) \cap L$ sicher in $L$ definierbar ist, gilt dann auch $\mathscr{P}(A) \cap L \in L_{\beta+1}$.)*
2. *$\beta$ ist sogar kleinstmöglich: Wenn $\alpha$ abzählbar ist, dann kann $\beta = \omega_1$ gewählt werden; im allgemeinen Fall kann für $\beta$ die kleinste Wohlordnung gewählt werden, deren Kardinalität größer als die von $\alpha$ ist.*

[14] Die hier gegebene Definition von $L_\alpha$ hat offenbar die Eigenschaft, dass $L_\alpha = L_\beta$ gilt, wenn die Wohlordnungen $\alpha$ und $\beta$ isomorph sind; daher genügt es, $L_\alpha$ für ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen von Wohlordnungen zu definieren. Üblicherweise wird $L_\alpha$ auch nur für Ordinalzahlen $\alpha$ definiert.

[15] Wenn wir statt Wohlordnungen Ordinalzahlen betrachten, vereinfacht sich hier die Notation; für Ordinalzahlen $\alpha$ gilt nämlich, dass auch jedes $x \in \alpha$ Ordinalzahl ist, und überdies ist die Wohlordnung $\alpha_{<x}$ gleich der Menge $x$ selbst. Man kann dann einfach $L_\alpha = \bigcup_{x\in\alpha} L_x$ schreiben.

### Absolutheit

Wenn man eine Struktur $A$ und eine Unterstruktur $B \subseteq A$ betrachtet, so gibt es oft Elemente von $B$, die in Bezug auf $B$ andere Eigenschaften als in Bezug auf $A$ haben. So trifft zum Beispiel die Eigenschaft $\exists y\,(y + y = x)$ (die hier durch eine Formel $\varphi(x)$ in der erststufigen Sprache der Prädikatenlogik ausgedrückt wird) für $x = 3$ zu, wenn wir die Struktur $A = (\mathbb{Q}, +, 0)$ der rationalen Zahlen betrachten, und ist falsch, wenn wir die Struktur der natürlichen Zahlen $B = (\mathbb{N}, +, 0)$ betrachten. Die genannten Sachverhalte kürzen wir mit

$$\mathbb{Q} \models \varphi(3) \qquad \text{bzw} \qquad \mathbb{N} \models \neg\varphi(3)$$

ab.

Wir nennen eine Eigenschaft $\varphi(x)$ „absolut" zwischen $A$ und $B$, wenn für alle $b \in B$ die Äquivalenz

$$A \models \varphi(b) \quad \Leftrightarrow \quad B \models \varphi(b)$$

gilt.

Der entscheidende Schritt beim Überprüfen der Gültigkeit der ZF-Axiome in $L$ ist das folgende Lemma:

**Lemma 2 (Reflexionslemma)** *Sei $\varphi$ eine Formel (in der Sprache der Mengenlehre). Dann gibt es eine Wohlordnung (oder Ordinalzahl) $\beta$, sodass die Formel $\varphi$ absolut zwischen L und $L_\beta$ ist. Überdies kann $\beta$ beliebig groß (also größer als jede vorgegebene Wohlordnung $\alpha_0$) gewählt werden.*

Mit diesem Hilfsmittel kann man nun das Aussonderungsaxiom und das Ersetzungsaxiom nachprüfen. Sei $A \in L$, sagen wir $A \in L_{\alpha_0}$, und sei $\varphi(x)$ eine Formel. Das Aussonderungsaxiom (in $L$) verlangt nun, dass es (in $L$!) eine Menge $B \subseteq A$ gibt, die genau jene Elemente $a \in A$ enthält, für die $L \models \varphi(a)$ gilt.

Bei der Konstruktion von $L$ mit Hilfe definierbarer Mengen haben wir in die Menge $L_{\alpha_0+1}$ auch die Menge

$$B' := \{x \in L_{\alpha_0} : x \in A \wedge L_{\alpha_0} \models \varphi(x)\}$$

aufgenommen, weil diese Menge mit Hilfe der Formel $x \in A \wedge \varphi(x)$ in $(L_{\alpha_0}, \in)$ erststufig definierbar war. Es ist aber nicht gesagt, dass diese Menge $B'$ gleich der gesuchten Menge $B$ ist, da die Existenz- und Allquantoren, die in der Definition

$$B = \{x \in A : L \models \varphi(x)\}$$

vorkommen, sich ja auf ganz $L$ beziehen; dieselben Quantoren werden in der Definition von $B'$ aber als Quantoren über $L_{\alpha_0}$ interpretiert.

Das Reflexionslemma erlaubt uns nun, eine Wohlordnung $\beta$ zu finden, sodass die Formel $\varphi(x)$ zwischen $L_\beta$ und $L$ absolut ist. Daraus folgt, dass die Menge

$$B = \{x \in A : L_\beta \models \varphi(x)\}$$

spätestens als Element von $L_{\beta+1}$ auftritt.

## 6 Eine globale Wohlordnung: $L$ erfüllt ZFC

Jedes Element von $L_{\alpha+1}$ lässt sich laut Definition in der Form $G_n(x_1, \ldots, x_k)$ mit $x_i \in L_\alpha \cup \{L_\alpha\}$ schreiben. Jene $x_i$, die nicht gleich $L_\alpha$ sind, lassen sich wiederum als Resultat von Gödeloperationen ausdrücken, sodass schließlich jedes Element von $L$ sich in der Form $G_n(L_{\alpha_1}, \ldots, L_{\alpha_k})$ für eine geeignete Gödeloperation $G_n$ und geeignete Wohlordnungen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ schreiben lässt. Diese Darstellung ist nicht eindeutig, aber wir können jedem $x \in L$ ein eindeutiges Tupel

$$d_x = (\alpha_x, n_x, k_x, \alpha_{x,1}, \ldots, \alpha_{x,k_x})$$

mit folgende Eigenschaften zuordnen:

- $G_{n_x}$ ist eine $k_x$-stellige Gödeloperation
- $x = G_{n_x}(L_{\alpha_{x,1}}, \ldots, L_{\alpha_{x,k}})$
- $\alpha_x = \max(\alpha_{x,1}, \ldots, \alpha_{x,k})$
- $d_x = (\alpha_x, n_x, k_x, \alpha_{x,1}, \ldots, \alpha_{x,k_x})$ ist das lexikographisch kleinstmögliche Tupel mit den genannten Eigenschaften.

Daraus kann man eine natürliche Ordnung auf ganz $L$ definieren: $x < y$ genau dann, wenn $d_x$ lexikographisch vor $d_y$ liegt. Man überzeugt sich leicht, dass diese Ordnung sogar eine Wohlordnung ist.

Jedes Element von $L$ ist auch Teilmenge von $L$ und wird durch diese Ordnung somit auch wohlgeordnet. Insbesondere kann man eine Wohlordnung auf den „konstruktiblen“ reellen Zahlen explizit angeben.

Die manchmal gehörte Aussage „Es mag zwar eine Wohlordnung der reellen Zahlen geben, aber diese ist intuitiv nicht vorstellbar, weil nicht definierbar“ ist also etwas ungenau. Richtig ist:

- Es gibt eine explizit definierbare Wohlordnung auf einer gewissen (ebenfalls definierbaren) Teilmenge $\mathbb{R} \cap L$ der reellen Zahlen.
- Dass diese Teilmenge ganz $\mathbb{R}$ ist, lässt sich zwar nicht beweisen, aber auch nicht widerlegen.

Die Gödelsche Konstruktion des konstruktiblen Universum lässt sich bereits auf Basis der ZF-Axiome durchführen; das Auswahlaxiom muss dabei nicht verwendet werden. Somit zeigt die Gödelsche Konstruktion:

> Wenn ZF konsistent (=erfüllbar[16]) ist, dann ist auch ZFC konsistent.

# 7 CH

Da das Universum $L$ alle Axiome von ZFC erfüllt, ist es in ZFC nicht beweisbar, dass es auch nichtkonstruktible Mengen gibt. Die Annahme

> Alle Mengen liegen in $L$

die üblicherweise mit $V = L$ abgekürzt wird, ist also aus den ZFC-Axiomen nicht widerlegbar.

Wir zeigen nun, dass aus den Axiomen ZFC + $V = L$ die Kontinuumshypothese folgt.

Es ist klar (genauer: kann mit transfiniter Induktion bewiesen werden), dass für jede abzählbare Wohlordnung $\alpha$ auch die Menge $L_\alpha$ abzählbar ist. (Wenn nämlich $L_\alpha$ abzählbar ist, dann auch $L_{\alpha+1} = \mathscr{D}(L_\alpha)$.) Daraus kann man leicht sehen, dass die Menge $L_{\omega_1}$ (die Vereinigung alle $L_\alpha$ mit abzählbarem $\alpha$) gleichmächtig mit $\omega_1$ ist.

Wir nehmen nun $V = L$ an. Aus dem oben angeführten Lemma über „kleine Potenzmengen“ folgt, dass die Potenzmenge von $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ eine Teilmenge von $L_{\omega_1}$ ist, und daher gleichmächtig mit $\omega_1$ ist.

# 8 Gibt es nichtkonstruktible Mengen?

Man kann sich fragen, ob die Gödelsche Konstruktion nicht vielleicht das gesamte mengentheoretische Universum ausschöpft. Wie schon erwähnt, ist die Annahme $V = L$ nicht widerlegbar; man könnte daher erwägen, die Formel $V = L$ als zusätzliches Axiom zu den ZFC-Axiomen hinzuzufügen. Dies hätte den Vorteil, dass das neue Axiomensystem ZFC + $V = L$ die Frage nach

[16]Eine Menge von Formeln heißt konsistent, wenn aus diesen Formeln kein Widerspruch herleitbar ist; sie heißt erfüllbar, wenn es eine Struktur gibt, in der alle Formeln der Menge gelten. Nach dem Gödelschen Vollständigkeitssatz sind die konsistenten Mengen (von erststufigen Formeln) genau die erfüllbaren

der Kardinalität der reellen Zahlen (und auch viele andere in ZFC unentscheidbare Fragen, wie die nach der Existenz einer Suslingeraden[17]) beantworten kann.

Als Motivation für das Akzeptieren eines neuen Axioms reicht aber die Stärke dieses Axioms nicht aus. Axiome sollten doch, in einem naiven Sinn, „wahr“ oder zumindest plausibel sein.

Das Axiom $V = L$ scheint den meisten Mengentheoretikern nicht plausibel. Die Mengentheorie versucht ja, das „gesamte (mathematische) Universum“ zu beschreiben, und möchte daher den Begriff der Menge möglichst weit fassen. Die Aussage „alle Mengen sind konstruktibel“ wird hingegen als Einschränkung empfunden, weil es nichtkonstruktible Mengen ausschließt. So gut wie alle Mengentheoretiker betrachten das Universum $L$ daher zwar als interessantes Modell von ZFC, dessen Struktur wert ist, genau untersucht zu werden, aber nicht als „richtiges“ Bild des tatsächlichen mengentheoretischen Universums.

Ein beträchtlicher Teil der derzeitigen mengentheoretischen Forschung beschäftigt sich mit „großen Kardinalzahlen“; die Existenz solcher Kardinalzahlen ist zwar nicht in ZFC beweisbar, wird aber von vielen als plausibler empfunden als deren Nichtexistenz. Aus der Existenz geeigneter großer Kardinalzahlen[18] folgt aber, dass das konstruktible Universum sehr „schmal“ ist, wenn man es mit dem tatsächlichen Universum vergleicht — insbesondere, dass es nur abzählbar viele konstruktible reelle Zahlen gibt.

## Literatur


[1] G. Cantor. *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, volume 2 of *Teubner-Archiv zur Mathematik*. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1984. Arbeiten zur Mengenlehre aus den Jahren 1872–1884. Edited and with a foreword and commentary by G. Asser.

[2] Georg Cantor. Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 77:258–262, 1874.

[3] Georg Cantor. Über einen Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84:242–258, 1878.

[4] Kurt Gödel. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 24:556–557, 1938.

[5] Thomas Jech. *Set theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. The third millennium edition, revised and expanded.

[6] Jean van Heijenoort, editor. *From Frege to Gödel*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 2002. A source book in mathematical logic, 1879–1931, Reprint of the third printing of the 1967 original.

[7] Ernst Zermelo. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Mathematische Annalen*, 59:514–516, 1904.


[17] Jede lineare Ordnung mit einer dichten abzählbaren Teilmenge ist isomorph zu einer Teilmenge von $\mathbb{R}$; eine lineare Ordnung, in der es keine überabzählbare Familie disjunkter offener Intervalle gibt, die aber nicht isomorph zu einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ (oder äquivalent: nicht separabel) ist, heißt Suslingerade.

[18] Aus jeder der folgenden Aussagen kann man beweisen, dass es nur abzählbar viele konstruktible reelle Zahlen gibt:

- Es gibt einen freien $\sigma$-vollständigen Ultrafilter auf einer unendlichen Menge.
- Es gibt ein $\sigma$-additives totales Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu : \mathscr{P}([0,1]) \to [0,1]$ mit $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.