Beispiel 3: Gleichverteilung/Maßtheorie

Satz (Flajolet,Kirschenhofer,Tichy;Grill). Fast alle Folgen sind s-gleichverteilt $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist langsam.

Frage. Ist die Menge

$$\bigcap_{s \text{ langsam}} \{\bar{x} : \bar{x} \text{ ist } s\text{-gleichverteilt}\}$$

– leer?
– meßbar mit Maß 0?
– meßbar mit vollem Maß?

Satz. Sei $(B_t)_{t:\mathbb{N}\to\mathbb{N}}$ eine Borel-Familie, $\mu(B_t) = 0$ für alle t, und

$$\forall n : t(n) < t'(n) \;\Rightarrow\; B_t \subseteq B_{t'}$$

Dann ist

$$\mu\Big(\bigcup_t B_t\Big) = 0$$

Korollar. Fast alle Folgen liegen in

$$\bigcap_{s \text{ langsam}} \{\bar{x} : \bar{x} \text{ ist } s\text{-gleichverteilt}\}$$