Martin Goldstern

Kurt Gödel und der Unvollständigkeitssatz

http://www.tuwien.ac.at/goldstern/

Kurt Gödel, 1906-1978

1906: geboren am 28.April in Brünn (heute Brno)

1924: Studium in Wien

- Studium der Mathematik
- auch Physikvorlesungen
- Interesse für Philosophie; Wiener Kreis

1930: Dissertation — **Vollständigkeitssatz**

1931: Habilitation — **Unvollständigkeitssatz**

1933– : Besuche in Princeton, *Institute for Advanced Study*.
Freundschaft mit Albert Einstein

Kurt Gödel, 1906-1978

1938: Heirat

1940: Mengenlehre; konstruktibles Universum, Auswahlaxiom, Kontinuumshypothese

1940: Emigration in die USA

1949: Gödels rotierendes Universum, Zeitreisen

1954: permanente Stelle am IAS

1978: an Untererernährung gestorben

Formale Systeme

Wenn $x + 2 = 9$, dann $x = 7$.

Schematisch:

$$\frac{x + 2 \quad = \quad 9}{x \quad = \quad 7}$$

Deutlicher:

$$\frac{x + 2 \quad = \quad 7 + 2}{x \quad = \quad 7}$$

Formale Systeme

Allgemeine Regel:

$$\frac{x+2 \quad = \quad a+2}{x \quad = \quad a}$$

Diese Regel lässt sich aber durch die folgende einfachere begründen:

$$\frac{x+1 \quad = \quad a+1}{x \quad = \quad a}$$

$$\begin{array}{rlcl}
 & x+2 & = & 9 \\
\hline
 & x+1+1 & = & 7+1+1 \\
\text{Regel} \rightarrow & \hline & & \\
 & x+1 & = & 7+1 \\
\text{Regel} \rightarrow & \hline & & \\
 & x & = & 7
\end{array}$$

Rechenregeln

- $x + 1 \neq 0$
- Wenn $x + 1 = y + 1$, dann $x = y$.
- $x + 0 = x$
- $x + (y + 1) = (x + y) + 1$.
- $x \cdot 0 = 0$
- $x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x$.
- Wenn $x \neq 0$, dann $\exists y : x = y + 1$.

Wahre und falsche Sätze

$\forall x$ ... für alle natürlichen Zahlen x

$\exists x$ ... es gibt (mindestens) eine nat. Zahl x

$:$ ... sodass gilt:

$$\forall x\,\forall y : x + y = y + x.$$

$$\forall x\,\exists y : x = y$$

$$\exists y\,\forall x : x = y$$

$$\exists x, y, z > 0 : x^2 + y^2 = z^2$$

$$\exists x, y, z > 0 : x^3 + y^3 = z^3$$

$$\exists x, y, z > 0 : x^3 + y^5 = z^2$$

$$\exists x, y, z > 0 : x^3 + y^3 = 2z^3$$

In allen diesen Fällen ist „ja“ leichter zu zeigen als „nein“.

Entscheidungsproblem: Gibt es eine Maschine (bzw: ein Computerprogramm; bzw: ein Axiomensystem), die/das von jedem arithmetischen Satz entscheiden kann, ob er wahr ist?

Was ist eine „Maschine"?
Endliche Liste von

Vorschriften

(gültigen) Rechenregeln

Programmschritten

Beweisfiguren

Axiomen

die aber **beliebig oft** (mit potentiell unendlichem Speicherplatz) ausgeführt werden können.

Entscheidungsproblem: Gibt es eine Maschine (bzw: ein Computerprogramm; bzw: ein Axiomensystem), die/das von jedem arithmetischen Satz entscheiden kann, ob er wahr ist?

(So eine Maschine könnte Mathematiker *im Prinzip* überflüssig machen.)

Bescheidenere Variante: können wir zumindest entscheiden, ob ein Satz der Form

$$\exists x \ldots \exists z : (\text{Gleichungen mit } x, \ldots, z)$$

wahr oder falsch ist?

(„Ja" ist leicht für solche Sätze; „nein" ist schwer. *Semi-entscheidbar*.)

Der 1.Gödelsche Satz

Sei M eine Maschine (ein Programm, ein Axiomensystem, ein Kalkül), die nur wahre arithmetische Sätze produziert. Dann gibt es einen arithmetischen Satz S_M, der zwar wahr ist, aber von M niemals produziert werden kan.

S kann aus einer Beschreibung von M explizit definiert werden.

Der 1.Gödelsche Satz – Gödelisierung

Gödels Idee: Wir können sowohl Maschinen M wie auch Sätze S wie auch einen Produktionsvorgang P durch natürliche Zahlen m, s und p codieren. (Bitfolgen!)

Die Aussage „M produziert den Satz S durch den Programmablauf P“ lässt sich dann als Gleichung

$$\big(m - \cdots + m^{p-s} - \cdots\big) \cdot \big(s \cdot m - \cdots\big) = 0$$

kodieren.

Der Satz: „M kann den Satz S niemals generieren“ lässt sich durch den folgenden Satz $G_{m,s}$ beschreiben:

$$\forall p \, \big(m - \cdots + m^{p-s} - \cdots\big) \cdot \big(s \cdot m - \cdots\big) \neq 0$$

$$G_{m,s} \ : \quad \forall p \left(m - \cdots + m^{p-s} - \cdots\right) \cdot \left(s \cdot m - \cdots\right) \neq 0$$

„Die durch m kodierte Maschine M kann den durch s kodierten Satz S nicht erzeugen.“

Gödel konnte nun zeigen, dass man für jede Zahl m (bzw jede Maschine M) eine Zahl s^* (bzw einen Satz S^*) finden kann, sodass $S^* = G_{m,s^*}$ ist.

Der Satz S^* besagt also nun:

> „Die durch m kodierte Maschine M kann mich (d.h., den Satz S^*) nicht erzeugen.“

S^* muss wahr sein, kann also von M nicht erzeugt werden.

Zusammenfassung: Zu jeder Maschine M, die nur wahre arithmetische Sätze generiert, gibt es einen wahren Satz S_M, der von M nie generiert werden kann.

(Matijasevich) Überdies kann S_M eine sehr einfache Form haben:

> „Das folgenden endliche System von *diophantischen Gleichungen*: ist unlösbar:“
>
> $p(x, \ldots, z) = 0$
>
> $q(x, \ldots, z) = 0.$
>
> $\ldots$
>
> wobei p, q, … Polynome sind, z.B. $p(x, \ldots, z) = x^3 z - 4xyz^2 + \cdots$, etc.

Der 2. Unvollständigkeitssatz

Zu jeder Maschine M können wir einen Satz C_M konstruieren, der besagt

> M wird niemals den Satz $0 = 1$ erzeugen

C_M wird auch als „M ist **konsistent**“ gelesen.

(Offensichtlich sind Systeme M, die so offensichtlich falsche Sätze wie 0=1 erzeugen, meist uninteressant.)

Durch Gödelisierung kann C_M als arithmetische Aussage geschrieben werden; aus Matijasevich’ Resultat folgt, dass C_M sogar in der Form

> Das folgende endliche diophantische Gleichungssystem ist unlösbar

geschrieben werden.

Gödel zeigt: Wenn C_M wahr ist (also M keinen Widerspruch erzeugt), dann kann C_M von M niemals erzeugt werden.

> Ein konsistentes System M kann nie seine eigene Konsistenz beweisen.

Schlussfolgerung:

- Die wahren Sätze der Arithmetik (und erst recht die der Mathematik) lassen sich nicht automatisch generieren
- Es gibt kein (hinschreibbares) System von Axiomen („Grundwahrheiten"), aus dem alle wahren Sätze der Arithmetik/der Mathematik bewiesen werden können.
- Gödel weiß mehr, als jede Maschine je wissen kann. (?)
- Der Mensch (das Hirn) weiß mehr, als jede Maschine je wissen kann. (?)
  (John Lucas)

Wirklich?

Woher wissen wir, dass eine vorgegebene Maschine M nur wahre Sätze produziert?

Umformulierung: Zu jeder Maschine M kann man explizit einen Satz S_M mit der folgenden Eigenschaft angeben:

> Wenn M nur wahre arithmetische Sätze generiert,
> dann ist S_M wahr, kann aber von M nie generiert werden.

(Dieser Satz S_M kann aus der Beschreibung von M mechanisch generiert werden.)

Rezeption

- Zunächst ignoriert von vielen Mathematikern
- Kein Kontakt mit Hilbert!
- **Bourbaki** (französisches Autorenteam, „Enzyklopädie der Mathematik“), sprechen über logische Grundlagen der Mathematik, axiomatische Methode — erwähnen Gödel nicht
  Dieudonne 1939, A.Weil 1948
- ignoriert in Nazi-Deutschland (Logik=jüdisch)
- größere Bekanntheit in 1950er Jahren
- populärwissenschaftlich: *Gödel, Escher, Bach* 1979, Bestseller.

Irrelevant? (1)

Gödels Satz lässt sich in mehreren mathematischen Gebieten interpretieren — wo immer die Gesamtheit der natürlichen Zahlen eine Rolle spielt, insbesondere:

- Zahlentheorie
- Kombinatorik

Überall gibt es Sätze, die wahr sind, aber nicht bewiesen werden können.

Aber: Diese Sätze haben oft eine Struktur, die sie als uninteressant und/oder hoffnungslos erscheinen lassen.

Beispiel: „Niedrigdimensionale“ Zahlentheorie, Gödelsche Sätze sind „hochdimensional“

Irrelevant? (2)

Codierung von Algorithmen/Programmen mit Zahlen ist heute selbstverständlich. Damals war das nicht so.

Gödels Satz: Zeigt Grenzen der Berechenbarkeit.

Gödels Methode:
Definition der Berechenbarkeit =
Grundlage der theoretischen Informatik

Gödel, Alan Turing, Stephen Kleene: Computerprogramme, bevor es noch Computer gab: *Erkenntnisvorlauf der Mathematik.*

Philosophische Konsequenzen

Ist das Gehirn eine „endliche Maschine“?

- endlich viele Atome, Beziehungen zwischen ihnen
- (Gödel:) Gehirn ändert sich, kann lernen.
- (Turing:) Kein mathematisches Modell für „Intuition“
- (Penrose:) Quantenmechanische Vorgänge im Gehirn. „Wir sind noch nicht so weit.“
- *idealer Mathematiker* vs. *wirklicher Mathematiker* — Wahrheit als Annäherung

The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy (Gödel 1961)

Es zeigt sich nämlich, dass bei einem systematischen Aufstellen der Axiome der Mathematik immer wieder neu und neuere Axiome evident werden, die nicht formallogisch aus den bisher aufgestellten folgen.

Es ist durch [den Unvollständigkeitssatz] gar nicht ausgeschlossen, dass trotzdem auf diese Weise jede klar gestellte mathematische Ja- oder Nein-Frage lösbar ist,
denn eben dieses Evidentwerden immer neuerer Axiome auf Grund des **Sinnes** der Grundbegriffe ist etwas, was eine Maschine nicht nachahmen kann.

Gödel als Philosoph

- Mathematik als platonische Ideenwelt; unendliche Mengen
- Sinn/Vernunft als Grundprinzip
- Theismus („Leibniz, nicht Spinoza“)

Aber: Paul Cohen – mathematische Resultate, die eng mit Gödels Arbeit zusammenhängen, großer Bewunderer von Gödel; dennoch Formalist.

Die theologische Weltanschauung ist mit allen bekannten Tatsachen vereinbar. Das heißt, die Vorstellung, dass alles auf der Erde Sinn und Vernunft hat.

Da unser Erdendasein aber nur zweifelhaften Sinn hat, kann es nur Mittel zum Zweck für eine andere Existenz sein.

Weiterführende Informationen

Bücher:

- Ernest Nagel, James R. Newman:
  Der Gödelsche Beweis.
- Douglas Hofstadter: *Gödel, Escher, Bach.*
- *und viele andere...*

Ausstellung *Gödels Jahrhundert*: Eintritt frei

- 26.4.–6.5.: Universität Wien
- **15.5.–16.6.**: Palais Palffy (Josefsplatz),
  Mo–Fr 10–19
- **11.7.–7.8.**: Museumsquartier

Vortrag:

- Rudolf Taschner und Matthias Baaz: *Gödel und das Unendliche.* 10.5.2006, 19:00,
  Auditorium des MuMoK, Museumsquartier.
  `math.space.or.at`