Beispiel 1: Maß und Kategorie

Definition. Für jede Halbordnung $(P,<)$ sei

$$b(P) := \min\{\#A : A \subseteq P, A \text{ unbeschränkt}\}$$

Beispiel. Sei $\mathcal{N}$ das Ideal der Lebesgue-Nullmengen in $\mathbb{R}$ geordnet durch Inklusion.
$b(\mathcal{N})$ is die Antwort auf die Frage:
Wieviele Nullmengen muß man vereinigen, um eine Menge von positivem äußeren Maß zu bekommen?
Offensichtlich ist $\aleph_0 < b(\mathcal{N}) \leq 2^{\aleph_0}$.

Analog sei $\mathcal{M}$ das Ideal der mageren Mengen (= Mengen von 1. Kategorie).
$b(\mathcal{M})$ ist die kleinste Anzahl von mageren (oder: nirgends dichten) Mengen, deren Vereinigung von 2. Kategorie ist.

Frage. Gibt es einen Zusammenhang zwischen $b(\mathcal{N})$ und $b(\mathcal{M})$?
Satz (Bartoszyński). $b(\mathcal{N}) \leq b(\mathcal{M})$

"Additivity of measure implies additivity of category"