Was ist Logik?

Zuerst Collegium Logicum.
Da wird der Geist Euch wohl dressiert,
In spanische Stiefeln eingeschnürt,
Da”3 er bedächtiger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn,
Und nicht etwa, die Kreuz und Quer,
Irrlichteliere hin und her.
Dann lehret man Euch manchen Tag,
Da”3, was Ihr sonst auf einen Schlag
Getrieben, wie Essen und Trinken frei,
Eins! Zwei! Drei! dazu nötig sei.
[. . .]
Der Philosoph, der tritt herein
Und beweist Euch, es mü”3t so sein:
Das Erst wär so, das Zweite so,
Und drum das Dritt und Vierte so;
Und wenn das Erst und Zweit nicht wär,
Das Dritt und Viert wär nimmermehr.

Goethe, “Faust”

Was ist Logik?

If it was so, it might be;
and if it were so, it would be;
but as it isn't, it ain't.
That's logic.

Lewis Caroll
"Alice through the Looking Glass"

03Bxx General logic

03Cxx Model theory

03Dxx Recursion theory

03Exx Set theory

03Fxx Proof theory and constructive math.

03Gxx Algebraic logic

03Hxx Nonstandard models

AMS Classification 1991

03E: Set Theory

03E05 Combinatorial set theory

03E10 Ordinal and cardinal numbers

03E15 Descriptive set theory

03E20 Other classical set theory

03E25 Axiom of choice and related propositions

03E30 Axiomatics of classical set theory

03E35 Consistency and independence results

03E40 Other aspects of forcing

03E45 Constructibility, ordinal definability, . . .

03E47 Other notions of set-theoretic definability

03E50 Continuum hypothesis and Martin's axiom

03E55 Large cardinals

03E60 Determinacy and related principles

03E65 Other hypotheses and axioms

03E70 Nonclassical and second-order set theories

03E75 Applications

03E99 None of the above but in this section

Logik und “naive” Mathematik

- Methoden aus der Logik
  - Sätze aus der Logik können in Sätze der naiven Mathematik “übersetzt” werden (Beispiel: Maß und Kategorie)

- Resultate aus der Logik
  - Logik zeigt, daß Fragen aus der naiven Mathematik keine Antwort haben, bzw nicht richtig gestellt sind
    (Beispiel: Verbände)
  - Logik beantwortet Fragen aus der naiven Mathematik
    (Beispiel: Gleichverteilung/Ma”3theorie)

- ...

Definition. Für jede Halbordnung $(P, <)$ sei

$$b(P) := \min\{\#A : A \subseteq P, A \text{ unbeschränkt}\}$$

Beispiel. Sei $\mathcal{N}$ das Ideal der Lebesgue-Nullmengen in $\mathbb{R}$ geordnet durch Inklusion.
$b(\mathcal{N})$ is die Antwort auf die Frage:
Wieviele Nullmengen muß man vereinigen, um eine Menge von positivem äußeren Maß zu bekommen?
Offensichtlich ist $\aleph_0 < b(\mathcal{N}) \leq 2^{\aleph_0}$.

Analog sei $\mathcal{M}$ das Ideal der mageren Mengen (= Mengen von 1. Kategorie).
$b(\mathcal{M})$ ist die kleinste Anzahl von mageren (oder: nirgends dichten) Mengen, deren Vereinigung von 2. Kategorie ist.

Frage. Gibt es einen Zusammenhang zwischen $b(\mathcal{N})$ und $b(\mathcal{M})$?

Satz (Bartoszyński). $b(\mathcal{N}) \leq b(\mathcal{M})$

“Additivity of measure implies additivity of category”

Beispiel. $b(P) \leq b(P \times Q)$.

Definition. Seien $(P, <)$ und $(Q, <)$ Halbordnungen. $P \prec Q$ bedeutet: Es gibt Funktionen e, π:

$$\begin{aligned} e : P &\rightarrow Q \\ P &\leftarrow Q : \pi \end{aligned}$$

sodass $e(p) \leq q \Rightarrow p \leq \pi(q)$.

Beispiel. Seien P und R Halbordnungen. Dann ist $P \prec P \times R$. $e(p) = (p,$ beliebig $)$, $\pi(p, r) = p$.

Bemerkung. Wenn $P \prec Q$, dann $b(P) \leq b(Q)$.

Satz (Fremlin)**.**

$$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$$

Beweis. Wie im Satz von Bartoszyński ! $\square$

Warnung des Vortragenden:
Die Anwendung der Kontinuumshypothese kann das Erkennen von Zusammenhängen behindern!

Definition. Sei $L = (L, \vee, \wedge)$ ein Verband. L hei"3t "ordnungspolynomvollständig", wenn jede monotone Funktion $f : L^n \to L$ durch ein Verbandspolynom (mit Koeffizienten in L) dargestellt werden kann.

Beispiel. M_n ist o.p.c.

Frage (naiv). Gibt es einen unendlichen ordungspolynomvollständigen Verband?

Antwort (naiv). Wei"3 nicht.

Frage (Logik). A. Kann man beweisen, da"3 es einen unendlichen o.p.c. Verband gibt?
B. Kann man beweisen, da"3 es *keinen* unendlichen o.p.c. Verband gibt?

Antwort (Logik).
A. Nein! [Goldstern+Shelah 1997]
B. Wei"3 (noch) nicht.

Definition. Sei $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ eine $\{0, \ldots, 9\}$-Folge. $\bar{x}$ hei" 3t gleichverteilt, wenn für alle $w \in \{0, \ldots, 9\}$ gilt:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\#\{i < N : a_i = w\}}{N} = \frac{1}{10}$$

Die Diskrepanz oder Abweichung von der Gleichverteilung wird durch

$$D(\bar{x}, N) = 10 \cdot \max_{w \in \{0,\ldots,9\}} \left| \frac{\#\{i < N : a_i = w\}}{N} - \frac{1}{10} \right|$$

definiert.

Sei k eine natürliche Zahl. Für jede natuerliche Zahl N mi" 3t die k-Diskrepanz $D_k(\bar{x}, N) =$

$$\max_{w:\{1,\ldots,k\}\to\{0,\ldots,9\}} \left| \frac{\#\{i < N : (a_{i+1}, \ldots, a_{i+k}) = (w(1), \ldots, w(k))\}}{N} - \frac{1}{10^k} \right| \cdot 10^k$$

wie gut die 10^k vielen $\{0, \ldots, 9\}$-Worte der Länge k in den ersten $N + k$ Elementen von $\bar{x}$ gleichverteilt sind.

— Beispiel 3: Gleichverteilung/Ma"3theorie —

$$D_k(\bar{x}, N) = \max_{w:\{1,\ldots,k\}\to\{0,\ldots,9\}}$$

$$\left|\frac{\#\{i < N : (a_{i+1}, \ldots, a_{i+k}) = (w(1), \ldots, w(k))\}}{N} - \frac{1}{10^k}\right| \cdot 10^k$$

$\bar{x}$ hei"3t "k-gleichverteilt", wenn

$$\lim_{N\to\infty} D_k(\bar{x}, N) = 0$$

ist. Elemente von $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{\bar{x} : \bar{x} \text{ ist } k\text{-gleichverteilt}\}$ heissen "vollständig gleichverteilt" (=normal zur Basis 10).

Fast alle Folgen sind k-gleichverteilt. (Gesetz der gro"3en Zahl) Daher: Fast alle Zahlen sind normal.

Definition. Sei $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. $\bar{x}$ hei"3t $s(N)$-gleichverteilt oder s-gleichverteilt, wenn gilt:

$$\lim_{N\to\infty} D_{s(N)}(\bar{x}, N) = 0$$

Definition. Eine Folge $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ hei"3t "langsam", wenn

$$\lim_{N\to\infty} \log N - \log\log N - s(N) = \infty$$

Beispiel 3: Gleichverteilung/Ma”3theorie

Satz (Flajolet,Kirschenhofer,Tichy;Grill)**.**
Fast alle Folgen sind s-gleichverteilt $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist langsam.

Frage. Ist die Menge

$$\bigcap_{s \text{ langsam}} \{\bar{x} : \bar{x} \text{ ist } s\text{-gleichverteilt}\}$$

– leer?
– me”3bar mit Ma”3 0?
– me”3bar mit vollem Ma”3?

Satz. Sei $(B_t)_{t:\mathbb{N}\to\mathbb{N}}$ eine Borel-Familie, $\mu(B_t) = 0$ für alle t, und

$$\forall n : t(n) < t'(n) \ \Rightarrow\ B_t \subseteq B_{t'}$$

Dann ist

$$\mu\Big(\bigcup_t B_t\Big) = 0$$

Korollar. Fast alle Folgen liegen in

$$\bigcap_{s \text{ langsam}} \{\bar{x} : \bar{x} \text{ ist } s\text{-gleichverteilt}\}$$

The set $W := \{t : \exists x\, t \in B_x\}$ is a $\mathbf{\Sigma}^1_1$ set, hence measurable. Assume that $\mu(W) > 0$. So there exists a Borel (closed) set A with $\mu(A) > 0$ such that $A \subseteq W$. Note that the statement

$$(*) \qquad \forall t : [t \in A \;\Rightarrow\; \exists x\; t \in B_x]$$

is a $\mathbf{\Pi}^1_2$-statement, hence absolute between any two transitive universe with the same ordinals [Shoenfield].

Now let r be a random real over the universe V, $r \in A$, and work in $V[r]$. Random forcing is $\mathbb{N}^\mathbb{N}$-bounding, i.e., we have

$$\forall x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\, \exists x' \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \cap V : x \leq x'$$

This implies $\forall x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\, \exists x' \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \cap V : B_x \supseteq B_{x'}$, and so

$$\bigcup_{x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}} B_x = \bigcup_{x' \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \cap V} B_{x'}$$

Moreover,

$$\forall x' \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \cap V : r \notin B_{x'}$$

(since r is a random real and each $B_{x'}$ is of measure 0), so together we get in $V[r]$:

$$\forall x \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : r \notin B_x.$$

Since $(*)$ holds also in $V[r]$, we get $V[r] \models r \notin A$, a contradiction.