

Beziehungen der Konvexgeometrie zu anderen Gebieten¹

1 Einführung

Die Konvexgeometrie ist zwischen Analysis, Geometrie und diskreter Mathematik angesiedelt. Sie hat zahlreiche Verbindungen zu anderen Gebieten der Mathematik, darunter zu folgenden:

Differentialgeometrie, insbesondere affine Differentialgeometrie,
Riemannsche Geometrie,
Variationsrechnung,
Kontrolltheorie,
gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen,
Mathematische Physik,
Funktionalanalysis, speziell Theorie der normierten Räume,
Kugelfunktionen,
geometrische Maßtheorie,
Ungleichungen,
Algebraische Geometrie,
Zahlentheorie, speziell Geometrie der Zahlen, aber auch algebraische
Zahlentheorie
Graphentheorie,
Optimierung,
Kodierungstheorie,
Kristallographie.

Die Beziehungen zu diesen Gebieten sind umfangreich und von systematischer Natur. Daneben kennt man aber auch Beziehungen mit sporadischem Charakter, zum Beispiel zu folgenden Gebieten:

Funktionentheorie von einer oder mehreren komplexen Variablen,
Potentialtheorie,
Funktionalgleichungen.

Im Folgenden sollen einige dieser Beziehungen anhand von Beispielen dargestellt werden.

2 Kennzeichnung der Gammafunktion

Eine Menge in einem linearen Raum, z.B. im d -dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{E}^d heißt *konvex*, wenn sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke

¹Dieser Artikel ist die Übersetzung eines Vortrags, den der Autor am 14.1.2004 in Modena für Professoren von Lyzeen gehalten hat.

enthält. Beispiele: Vollkugel, Tetraeder. Ist C konvex, dann nennt man eine Funktion $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ *konvex*, falls gilt

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \text{ für } x, y \in C, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

D.h., zieht man eine beliebige Sehne zwischen zwei Punkten des Graphen von f , so liegt der Teil des Graphen zwischen den Endpunkten unter der Sehne. Beispiel: $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.

Der Begriff der Konvexität dient manchmal zur Beschreibung einer Situation, manchmal ist er eine passende Voraussetzung für ein Resultat, wie bei der folgenden Kennzeichnung der Gammafunktion.

Die *Gammafunktion* Γ kann durch

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \text{ für } x > 0$$

definiert werden. Man zeigt leicht, dass sie folgende Eigenschaften hat:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma(x + 1) &= x \Gamma(x) \text{ für } x > 0. \end{aligned}$$

Speziell gilt also

$$\Gamma(n + 1) = n \Gamma(n) = \cdots = n! \text{ für } n = 1, 2, \dots$$

Wir betrachten nun das Problem, die Gammafunktion zu kennzeichnen. Die Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit

$$(1) \quad f(1) = 1, f(n + 1) = n f(n) \text{ für } n = 1, 2, \dots,$$

sind genau die Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, die man in der Form $f(x) = \Gamma(x) + g(x)$ für $x > 0$ darstellen kann, wobei $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine beliebige Funktion mit Nullstellen an den Stellen $x = 1, 2, \dots$ Zu einer Kennzeichnung muß man also mehr verlangen als in (1). Die Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit

$$(2) \quad f(1) = 1, f(x + 1) = x f(x) \text{ für } x > 0$$

sind genau die Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, die man in der Form $f(x) = \Gamma(x)h(x)$ für $x > 0$ darstellen kann, wobei $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine beliebige Funktion mit $h(1) = 1$ und der Periode 1 ist. Es reicht also auch (2) noch nicht zu einer Kennzeichnung. Eine Kennzeichnung stellt aber der folgende berühmte *Satz von Bohr und Mollerup* [5] dar:

Satz 1. *Es sei $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \\ f(x + 1) &= x f(x) \text{ für } x > 0, \\ \log f &\text{ ist konvex.} \end{aligned}$$

Dann ist $f = \Gamma$.

Für einen eleganten Beweis, der auf Artin zurückgeht, sowie weitere einschlägige Resultate, siehe Webster [26].

3 Sandhaufen von maximalem Volumen

Resultate der Konvexgeometrie erweisen sich oft als hilfreich für Untersuchungen in ganz anderen Gebieten. Ein Beispiel über Sandhaufen wird hier behandelt, ein weiteres Beispiel, der Satz von Wulff aus der Kristallographie, nächsten Abschnitt besprochen.

Leavitt und Ungar [17] haben folgendes Resultat gezeigt:

Satz 2. *Unter allen Sandhaufen auf einem kompakten Bereich D der Ebene von vorgelegtem Flächeninhalt haben diejenigen maximales Volumen, bei denen D ein Kreis ist.*

Beweis. Für $x \in D$ sei $\delta(x)$ der Abstand von x vom Rand ∂D von D . Ist α der Gleitwinkel des Sandes, so kann der Sandhaufen auf D an der Stelle x höchstens die Höhe $\tan \alpha \delta(x)$ haben. Für das Volumen V des Sandhaufens gilt also

$$(1) \quad V \leq \tan \alpha \int_D \delta(x) dx.$$

Es sei $\rho > 0$ der größte Abstand, den ein Punkt von D von ∂D haben kann. Für $0 \leq \delta \leq \rho$ sei der *innere Parallelbereich* von D im Abstand δ definiert durch

$$(2) \quad D_{-\delta} = \{x \in D : \delta(x) \geq \delta\} = \{x \in D : x + \delta B^2 \subset D\}.$$

Dabei ist $x + \delta B^2$ die Kreisscheibe mit Radius δ und Mittelpunkt x . $D_{-\delta}$ ist kompakt und es gilt

$$D_{-\delta} + \delta B^2 = \bigcup_{x \in D_{-\delta}} \{x + \delta B^2\} \subset D \text{ für } 0 \leq \delta \leq \rho.$$

Der zweidimensionale Fall der *Ungleichung von Brunn–Minkowski*, einem der zentralen Resultate der Konvexgeometrie, besagt nun Folgendes, wobei A den Flächeninhalt bezeichnet:

$$A(D_{-\delta})^{\frac{1}{2}} + A(\delta B^2)^{\frac{1}{2}} \leq A(D)^{\frac{1}{2}},$$

oder

$$(3) \quad A(D_{-\delta}) \leq (A(D)^{\frac{1}{2}} - \delta \pi^{\frac{1}{2}})^2 \text{ für } 0 \leq \delta \leq \rho.$$

Wendet man auf das Integral in (1) den *Satz von Fubini* an (man schneidet den Sandhaufen in horizontale Schichten), so folgt mit (2) und (3)

$$\begin{aligned}
V &\leq \tan \alpha \int_D \delta(x) dx = \tan \alpha \int_0^{\varrho} A(\{x \in D : \delta(x) \geq \delta\}) d\delta \\
&= \tan \alpha \int_0^{\varrho} A(D_{-\delta}) d\delta \leq \tan \alpha \int_0^{\varrho} (A(D)^{\frac{1}{2}} - \delta\pi^{\frac{1}{2}})^2 d\delta \\
&= -\frac{\tan \alpha}{3\pi^{\frac{1}{2}}} (A(D)^{\frac{1}{2}} - \delta\pi^{\frac{1}{2}})^3 \Big|_0^{\varrho} \\
&= -\frac{\tan \alpha}{3\pi^{\frac{1}{2}}} (A(D)^{\frac{1}{2}} - \varrho\pi^{\frac{1}{2}})^3 + \frac{\tan \alpha}{3\pi^{\frac{1}{2}}} A(D)^{\frac{3}{2}} \leq \frac{\tan \alpha}{3\pi^{\frac{1}{2}}} A(D)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

In der letzten auftretenden Ungleichung tritt Gleichheit genau dann auf, wenn $A(D)^{\frac{1}{2}} = \varrho\pi^{\frac{1}{2}}$ ist, d.h. genau dann, wenn D mit dem größten eingeschriebenen Kreis übereinstimmt. Wir haben damit Folgendes gezeigt: Für das Volumen eines Sandhaufens auf D gilt

$$(4) \quad V \leq \frac{\tan \alpha}{3\pi^{\frac{1}{2}}} A(D)^{\frac{3}{2}}$$

und Gleichheit, wenn sie überhaupt eintritt, bewirkt, dass D ein Kreis vom Radius

$$\varrho = \frac{A(D)^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}$$

ist. Eine einfache Rechnung zeigt, ist D ein Kreis von diesem Radius, dann gilt für das Volumen V des kegelförmigen Sandhaufens mit Steigungswinkel α in (4) Gleichheit.

Damit ist bewiesen, dass bei vorgelegtem Flächeninhalt von D das Volumen seinen Maximalwert

$$\frac{\tan \alpha}{3\pi^{\frac{1}{2}}} A(D)^{\frac{3}{2}}$$

genau für kegelförmige Sandhaufen mit Steigungswinkel α annimmt. \square

4 Kristalle und der Satz von Wulff

Warum haben Kristalle die bekannten, schönen Formen? Seit Ende des 18. Jahrhunderts waren viele Kristallographen der Meinung, dass jedem Kristall ein Punktgitter zugrunde liegt, das viele Eigenschaften des Kristalls bedingt. Der experimentelle Nachweis dieser Hypothese erfolgte erst Anfang der 20. Jahrhunderts durch von Laue und Vater und Sohn Bragg, wofür alle drei den Nobelpreis erhielten.

Eine Seitenfläche eines Kristalls liegt immer in einer Gitterebene. Nach Gibbs, P. Curie und Wulff sind reale Kristalle unter allen konvexen Polytopen, deren Seitenflächen in Gitterebenen liegen und vorgelegtes Volumen haben, dadurch

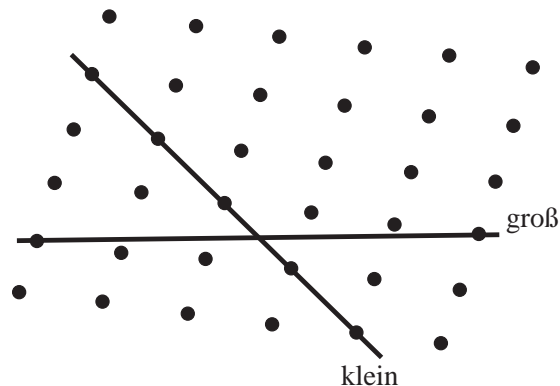


Abbildung 1: Gitterebenen mit kleiner und großer Oberflächenenergie

ausgezeichnet, dass ihre *Oberflächenenergie* minimal ist. Die Oberflächenenergie pro Flächeneinheit in einer Gitterebene ist klein, wenn die Gitterebene stark mit Gitterpunkten besetzt ist, groß andernfalls. Es werden also bei realen Kristallen nur wenige Normalenrichtungen von Seitenflächen auftreten. Im folgenden *Gesetz von Wulff* [27] werden Kristalle näher beschrieben:

Satz 3. *Es seien u_1, \dots, u_n Einheitsvektoren im \mathbb{E}^3 (die Normalvektoren der Kristallflächen), so dass gilt, $\mathbb{E}^3 = \{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n : \alpha_i \geq 0\}$. Ferner seien $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ positive Zahlen (die Oberflächenenergien pro Flächeneinheit der Kristallseitenflächen normal zu u_1, \dots, u_n). Es sei K das Polytop*

$$K = \{x \in \mathbb{E}^3 : x \cdot u_i \leq \varepsilon_i, i = 1, \dots, n\}$$

(der Kristall). Unter allen konvexen Polytopen von gleichem Volumen wie K , bei denen die Normalvektoren der Seitenflächen zu $\{u_1, \dots, u_n\}$ gehören, haben genau K und seine Translate minimale Oberflächenenergie.

Ein erster, etwas obskurer Beweis dieses Satzes stammt von Dinghas [6]. Wesentliches Hilfsmittel ist wieder die *Ungleichung von Brunn–Minkowski*. Im Grunde ist das Gesetz von Wulff eine Aussage aus dem isoperimetrischen Problemkreis. Es ordnet sich in ein modernes Teilgebiet der Konvexgeometrie ein, das sich mit verallgemeinerten Oberflächenbegriffen beschäftigt.

5 Eine Kennzeichnung der Kugel durch ihr Gravitationsfeld

Manche Probleme in anderen Gebieten der Mathematik, z.B. in der Mechanik, der Maßtheorie oder der Potentialtheorie, haben als Lösungen spezielle konvexe Körper wie Kugeln, Ellipsoide, Simplexe oder Zonoide.

Unter einer Vielzahl von Kugelkennzeichnungen geometrischer und analytischer Natur, sei eine aus der Potentialtheorie angegeben. Sie stammt von Aharonov, Schiffer und Zalcman [1], ein Sonderfall wurde früher von Novikov [20] behandelt.

Satz 4. *Es sei C ein Körper im \mathbb{E}^3 , d.h. C ist der Abschluss seines Inneren, so dass $\mathbb{E}^3 \setminus C$ zusammenhängend ist. Ist C mit Masse konstanter Dichte belegt und stimmt sein Gravitationsfeld in $\mathbb{E}^3 \setminus C$ mit dem eines passenden Massenpunktes überein, dann ist C eine Vollkugel.*

Man kann also aus dem Gravitationsfeld einer homogenen Massenverteilung darauf schließen, ob sie kugelförmig ist oder nicht.

Zum Beweis dieses Satzes werden tiefer liegende Hilfsmittel der Potentialtheorie und der Maßtheorie herangezogen.

6 Nullstellen von Polynomen

Zwischen Polynomen und konvexen Polytopen (in der Ebene: Polygonen) gibt es zahlreiche Beziehungen. Zuerst einige Erklärungen: Die *konvexe Hülle* einer Menge im \mathbb{E}^d ist die kleinste konvexe Menge, welche die gegebene Menge enthält. Ein *konvexes Polytop* (in der Ebene: *Polygon*) ist die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten. Sind p_1, \dots, p_n diese Punkte, dann besteht das davon erzeugte konvexe Polytop genau aus den *Konvexkombinationen* dieser Punkte, d.h. genau aus den Punkten der Form

$$\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_n p_n \text{ mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ und } \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Ein altes Resultat von Gauss [8] gibt Information über die Lage der Nullstellen der Ableitung eines komplexen Polynoms, falls man die Nullstellen des ursprünglichen Polynoms kennt. Das Gauss'sche Resultat ist in einem handschriftlichen Zusatz zu seinem dritten Beweis des Fundamentalsatzes enthalten, der in seinen Werken abgedruckt ist.

Satz 5. *Die Nullstellen der Ableitung eines komplexen Polynoms liegen in der konvexen Hülle der Nullstellen des ursprünglichen Polynoms.*

Beweis. Es seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ die Nullstellen eines komplexen Polynoms p , wobei jede so oft angeschrieben ist, wie es ihrer Vielfachheit entspricht. Dann lässt sich p in folgender Form darstellen:

$$p(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \text{ für } z \in \mathbb{C}$$

mit einer passenden Zahl $a \in \mathbb{C}$. Ist $z \neq z_1, \dots, z_n$, dann sieht man leicht, dass gilt

$$(5) \quad \frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \dots + \frac{1}{z - z_n} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{|z - z_1|^2} + \dots + \frac{\bar{z} - \bar{z}_n}{|z - z_n|^2}.$$

Es sei nun z eine Nullstelle von $p'(z)$. Wir müssen zeigen, z ist eine Konvexkombination von z_1, \dots, z_n . Stimmt z mit einer der Nullstellen z_1, \dots, z_n überein, ist das trivial. Andernfalls folgt aus (5),

$$z = \frac{\frac{1}{|z-z_1|^2}z_1 + \dots + \frac{1}{|z-z_n|^2}z_n}{\frac{1}{|z-z_1|^2} + \dots + \frac{1}{|z-z_n|^2}}.$$

z ist also eine Konvexkombination von z_1, \dots, z_n . □

7 Newtonpolytope und Irreduzibilität von Polynomen

Einem reellen oder komplexen Polynom in zwei oder mehr Variablen kann man ein konvexes Polytop zuordnen, das Newtonpolytop des Polynoms, so dass zwischen geometrischen Eigenschaften des Polytops und algebraischen Eigenschaften des Polynoms enge Beziehungen bestehen. Newton hat 1669 die Frage der Reihenentwicklung algebraischer Funktionen mit Hilfe von Polygonen, sogenannten Newtondiagrammen, behandelt, siehe auch Arnold [2]. Das hat dann zu dem hier betrachteten Begriff von Newtonpolygonen bzw. Newtonpolytopen geführt. Wir werden in diesem Abschnitt das Problem der Irreduzibilität eines Polynoms behandeln, im Folgenden Nullstellen von algebraischen Gleichungssystemen.

Es sei \mathbb{Z}^2 das Gitter in \mathbb{E}^2 das aus allen Punkten mit ganzzahligen Koordinaten besteht, das so genannte *ganzzahlige Gitter*. Ein *konvexes Gitterpolygon* ist die konvexe Hülle einer endlichen Teilmenge von \mathbb{Z}^2 . Insbesondere sind seine Eckpunkte Punkte des Gitters \mathbb{Z}^2 . Sind P und Q konvexe Gitterpolygone, dann ist ihre *Minkowskisumme*

$$P + Q = \{x + y : x \in P, y \in Q\} = \bigcup_{x \in P} \{x + Q\}$$

wieder ein konvexes Gitterpolygon.

Ein Gitterpolygon P nennt man *irreduzibel* (im geometrischen Sinn), wenn es nicht dargestellt werden kann in der Form

$$P = Q + R,$$

wobei Q und R konvexe Gitterpolygone sind die beide nicht nur aus einem Punkt bestehen. Alle diese Begriffe lassen sich sofort auf höhere Dimensionen übertragen.

Ist $p = p(x, y)$ ein reelles oder komplexes Polynom in zwei Variablen, dann betrachten wir alle Monome $ax^i y^j$, $a \neq 0$, von p und ordnen $ax^i y^j$ den Gitterpunkt $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ zu. Die konvexe Hülle der so erhaltenen Gitterpunkte nennt man das *Newtonpolygon* von p . Ein Polynom $p = p(x, y)$ heißt *irreduzibel* (im algebraischen Sinn), wenn es nicht in der Form

$$p(x, y) = q(x, y)r(x, y)$$

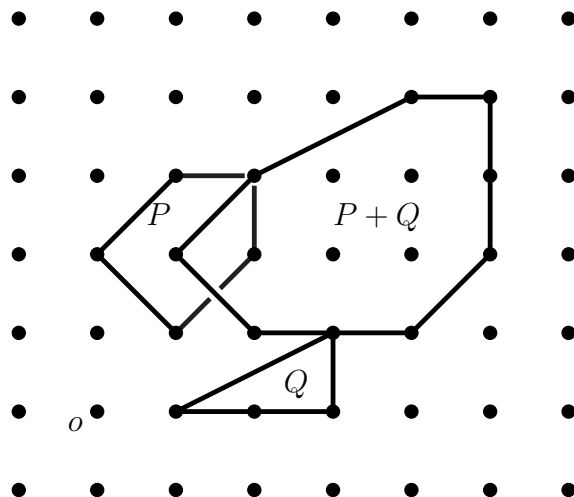


Abbildung 2: Addition von Gitterpolygonen

dargestellt werden kann, wobei q und r Polynome sind, die beide nicht nur aus einem Monom bestehen. Auch diese Begriffe lassen sich leicht auf höhere Dimensionen übertragen.

Sind p, q zwei Polynome und P, Q ihre Newtonpolygone, dann hat, wie man leicht zeigt, das Polynom pq das Newtonpolygon $P + Q$. Daraus ergibt sich der folgende einfache, aber interessante und anwendungsträchtige Satz von Ostrowski [21]:

Satz 6. *Es sei $p = p(x, y)$ ein Polynom und P sein Newtonpolygon. Ist P irreduzibel (im geometrischen Sinne), dann ist p irreduzibel (im algebraischen Sinne).*

Da es in vielen Fällen einfach ist, festzustellen, ob P irreduzibel ist, stellt dieser Satz ein wirkungsvolles Irreduzibilitätskriterium für Polynome in zwei Variablen dar; Verallgemeinerungen auf mehr als zwei Variablen liegen auf der Hand. So erhält man leicht das folgende *Irreduzibilitätskriterium von Stepanov [24] und Schmidt [22]*:

Satz 7. *Es sei*

$$p(x, y) = ax^m + by^n + \sum_{i,j>0} a_{ij}x^i y^j$$

ein reelles oder komplexes Polynom. Sind m und n teilerfremd und liegt das Newtonpolygon von p im Dreieck mit den Eckpunkten $o, (m, 0), (0, n)$, dann ist p irreduzibel.

Siehe auch die Arbeit von Gao [9].

8 Newtonpolytope und Lösungen algebraischer Gleichungssysteme

Eine weitere Beziehung, die tief ins 19. Jahrhundert zurückreicht, ist die zwischen der Anzahl der Lösungen eines algebraischen Gleichungssystems und den Newtonpolytopen der auftretenden Polynome.

Zuerst ein Hilfsmittel, der *Satz von Minkowski* [19] *über gemischte Volumina*: Sind C_1, \dots, C_n n konvexe Körper im \mathbb{E}^d , d.h. kompakte und konvexe Teilmengen des \mathbb{E}^d , und sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, ist auch

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n : x_i \in C_i\}$$

ein konvexer Körper. Sein Volumen ist ein homogenes Polynom vom Grad d in den Variablen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$V(\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n) = \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^n V(C_{i_1}, \dots, C_{i_d}) \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_d}.$$

Dabei hängt der Koeffizient $V(C_{i_1}, \dots, C_{i_d})$ von $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_d}$ nur von den konvexen Körpern C_{i_1}, \dots, C_{i_d} ab. Er heißt das *gemischte Volumen* von C_{i_1}, \dots, C_{i_d} . Gemischte Volumina sind genau untersucht und man weiß auch, wie man sie berechnen kann, wenigstens im Falle, wenn die konvexen Körper Polytope sind.

Minding [18] ($d = 2$) und Bernstein [4] haben folgendes schöne Resultat gezeigt:

Satz 8. *Es sei*

$$\begin{aligned} p_1(z_1, \dots, z_d) &= 0, \\ p_2(z_1, \dots, z_d) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ p_d(z_1, \dots, z_d) &= 0, \end{aligned}$$

ein allgemeines System von d komplexen Polynomgleichungen in d Variablen mit $p_1(o), \dots, p_d(o) \neq 0$. Es seien P_1, \dots, P_d die zugehörigen Newtonpolytope. Dann ist die Anzahl der Lösungen dieses Gleichungssystems gleich $d! V(P_1, \dots, P_d)$.

Dieses Resultat ist ein überraschender Brückenschlag von der Konvexgeometrie zur algebraischen Geometrie. Generell sind die Beziehungen zwischen beiden Gebieten in den letzten Jahrzehnten deutlich stärker geworden.

Zum Satz von Minding–Bernstein siehe auch Sturmfels [25].

9 Minimaldistorsion eines Kodierers

Wir betrachten folgendes, einfach scheinende Problem: Es sei C eine Teilmenge des \mathbb{E}^d . Man bestimme den Ausdruck

$$\min_{\{c_1, \dots, c_n\} \subset \mathbb{E}^d} \int_C \min_{i=1, \dots, n} \{\|x - c_i\|^2\} dx,$$

ferner die n -Tupel $\{c_1, \dots, c_n\}$, für die das Minimum angenommen wird. Dieses Problem und Verallgemeinerungen davon sind unabhängig voneinander in den vergangenen 60 Jahren in folgenden Gebieten aufgetreten:

diskrete Geometrie,
 Datenübertragung,
 numerische Integration,
 Wahrscheinlichkeitstheorie,
 Approximationstheorie,
 Konvexgeometrie.

Wir besprechen das Problem im Zusammenhang mit der Datenübertragung und geben im nächsten Abschnitt eine Anwendung auf das isoperimetrische Problem für Polytope an.

Ein *Datenübertragungssystem* hat folgendes Schema:

$$x \rightarrow \text{Codierer} \xrightarrow{c} \text{Kanal} \xrightarrow{c'} \text{Decodierer} \rightarrow x'$$

Eine Quelle erzeugt ein Signal x . Im Codierer wird das Signal in ein Codewort c übersetzt, das einem Codebuch entnommen wird, welches aus endlich vielen Codewörtern besteht. c wird dann in einem fehlerbehafteten Kanal übertragen. Das Ergebnis ist ein Wort c' , möglicherweise verschieden von c . Im Decodierer wird c' in ein Signal x' übersetzt. Die Frage, wie man aus dem Wort c' das Codewort c zurückgewinnen kann, hat mit fehlerkorrigierenden Codes zu tun. Wir betrachten hier eine andere Frage, nämlich das Problem, die Qualität eines Codierers in einem praxisrelevanten Spezialfall zu beurteilen.

Die Menge der Signale sei eine Menge C des \mathbb{E}^d . Der Codierer besteht aus n Mengen C_1, \dots, C_n , die eine Zerlegung von C bilden, und aus n Punkten c_1, \dots, c_n , den Codewörtern. Der Codierer funktioniert so, daß er einem Signal $x \in C$ das Codewort c_i zuordnet, falls gilt, $x \in C_i$. Der Informationsverlust, der entsteht, wenn man x durch c_i ersetzt hat mit dem Abstand $\|x - c_i\|$ von x und c_i zu tun. In vielen Fällen ist eine Größe der Form

$$f(\|x - c_i\|)$$

ein gutes Maß für den Informationsverlust, wobei $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ eine monoton wachsende Funktion ist. Ein typischer Praxisfall ist $f(t) = t^2$. Die Größe $f(\|x - c_i\|)$ heißt *Distorsion* von x . Die *durchschnittliche Distorsion* unseres Codierers ist definiert als

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} f(\|x - c_i\|) dx.$$

Sie ist ein Maß für die Qualität des Codierers. Es ergeben sich nun folgende Probleme: Erstens, das Minimum der durchschnittlichen Distorsion, d.h. die *Minimaldistorsion* zu bestimmen oder wenigstens abzuschätzen, und zweitens, das minimierende Codebuch $\{c_1, \dots, c_n\}$ anzugeben, oder wenigstens eine ungefähre

Beschreibung zu geben. Die zugehörige Zerlegung C_1, \dots, C_n von C ist dann leicht zu finden. Die Minimaldistorsion kann man wie folgt ausdrücken:

$$\min_{\{c_1, \dots, c_n\} \subset \mathbb{E}^d} \int_C \min_{i=1, \dots, n} \{f(\|x - c_i\|)\} dx.$$

In der Datenübertragungstheorie von Shannon [23] untersucht man die Minimaldistorsion für festes n wenn d groß wird, in der Datenübertragungstheorie von Zador [28] für festes d wenn n groß wird. Zador hat für $f(t) = t^\alpha$ eine asymptotische Formel für die Minimaldistorsion für $n \rightarrow \infty$ angegeben. Eine Verallgemeinerung davon stammt vom Autor [14]:

Satz 9. *Es genüge $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ einer bestimmten, natürlichen Voraussetzung. Dann gilt für die Minimaldistorsion,*

$$\min_{\{c_1, \dots, c_n\} \subset \mathbb{E}^d} \int_C \min_{i=1, \dots, n} \{f(\|x - c_i\|)\} dx \sim \operatorname{div} V(C)^{\frac{\alpha+d}{d}} f\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{d}}}\right) \text{ bei } n \rightarrow \infty.$$

Hier ist $\operatorname{div} > 0$ eine von d und f und $\alpha > 0$ eine von f abhängige Konstante.

Das zweite der genannten Problem ist ab der Dimension $d = 3$ offen. Für $d = 2$ hat der Autor [12] gezeigt, dass die minimierenden Codebücher $\{c_1, \dots, c_n\}$ für großes n in einem asymptotischen Sinn ein über C gebreitetes, regulär hexagonales Muster bilden. Damit wird eine *Vermutung von Gersho* [10] für $d = 2$ bestätigt.

Ein genauerer Bericht über die angeschnittenen Probleme bei Gruber [13].

10 Ein isoperimetrisches Problem für Polytope

Unter den zahlreichen isoperimetrischen Problemen geometrischer und analytischer Natur, findet sich auch die folgende Frage: Ist P ein konvexes Polytop im \mathbb{E}^d , dann versteht man unter seinem *isoperimetrischen Quotienten* den Ausdruck

$$\frac{A(P)^d}{V(P)^{d-1}},$$

wobei $A(P)$ den Flächeninhalt seines Randes bezeichnet. Es erheben sich wieder zwei Fragen: Erstens, unter allen Polytopen P mit n Seitenflächen das Minimum des isoperimetrischen Quotienten zu bestimmen oder abzuschätzen, und die Polytope P_n zu beschreiben, für die dieses Minimum angenommen wird. Eine genaue Beantwortung dieser Probleme steht außerhalb der derzeitigen Möglichkeiten der Mathematik, man kann aber Folgendes zeigen, siehe den Autor [14]:

$$\frac{A(P_n)^d}{V(P_n)^{d-1}} \sim d^d V(B^d) + \frac{d^d}{2} \operatorname{div} A(B^d)^{\frac{d+1}{d-1}} \frac{1}{n^{\frac{2}{d-1}}} \text{ bei } n \rightarrow \infty.$$

Hier ist B^d die d -dimensionale Einheitskugel. Für $d = 3$ sind die Seitenflächen von P_n in einem asymptotischen Sinne reguläre Sechsecke derselben Kantenlänge. Der Beweis dieser beiden Aussagen erfolgt unter wesentlicher Benutzung der im vorherigen Abschnitt angeführten Resultate.

Bemerkung

Die angegebenen Beispiele zeigen die in den letzten Jahrzehnten deutlich stärker gewordene Verflechtung der Konvexgeometrie mit dem Gesamtbereich der Mathematik.

An einführender Literatur zur Konvexgeometrie seien die Bücher von Eggleston [7], Webster [26] und Barvinok [3], sowie der Artikel [11] genannt. Ein Buch des Autors [15] mit zahlreichen Anwendungen, befindet sich in Vorbereitung. Standardwerke auf diesem Gebiet sind das Handbuch der Konvexgeometrie [16] und die Bücher der roten Reihe bei Cambridge University Press.

Literatur

- [1] Aharonov, D., Schiffer, M.M., Zalcman, L., Potato kugel, Israel J. Math. **40** (1981) 331–339
- [2] Arnold, V.I., Huygens and Barrow, Newton and Hooke, Birkhäuser, Basel 1990
- [3] Barvinok, A., A course in convexity, Amer. Math. Soc., Providence, RI 2002
- [4] Bernštein, D., The number of roots of a system of equations, Funct. Anal. Appl. **9** (1975) 183–185
- [5] Bohr, H., Møllerup, J., Laerebog i matematisk analyse **3**, Gjellerup, København 1922
- [6] Dinghas, A., Über einen geometrischen Satz von Wulff für die Gleichgewichtsform von Kristallen, Z. Krist. **105** (1944) 301–314
- [7] Eggleston, H.G., Convexity, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1958
- [8] Gauss, C.F., Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia, Göttingische gelehrte Anzeigen **1816** März 2, Stück 35 337–343, Werke **3** 105–112, Königl. Ges. Wiss., Göttingen 1876
- [9] Gao, S., Absolute irreducibility of polynomials via Newton polytopes, J. Algebra **237** (2001) 501–520
- [10] Gersho, A., Asymptotically optimal block quantization, IEEE Trans. Inform. Theory **IT-25** (1979) 373–380
- [11] Gruber, P.M., Aspects of convexity and its applications, Expo. Math. **2** (1984) 47–83
- [12] Gruber, P.M., Optimal configuration of finite point sets in Riemannian 2-manifolds, Geom. Dedicata **84** (2001) 271–320
- [13] Gruber, P.M., Optimale Quantisierung, Math. Semesterber. **49** (2002) 227–251
- [14] Gruber, P.M., Optimum quantization and its applications, Adv. in Math., im Erscheinen
- [15] Gruber, P.M., Convex and discrete geometry, an introduction with applications, in Vorbereitung
- [16] Handbook of convex geometry A,B, eds. P.M. Gruber, J.M. Wills, North-Holland, Amsterdam 1993

- [17] Leavitt, J., Ungar, P., Circle supports the largest sandpile, *Comm. Pure Appl. Math.* **15** (1962) 35–37
- [18] Minding, F., Über die Bestimmung des Grades der durch Elimination hervorgehenden Gleichung, *J. reine angew. Math.* **22** (1841) 178–183
- [19] Minkowski, H., Volumen und Oberfläche, *Math. Ann.* **57** (1903) 447–495, *Ges. Abh.* **2** 230–276
- [20] Novikov, P.S., Sur le problème inverse du potentiel, *Dokl. Acad. Sci. SSSR, N.S.* **18** (1938) 165–168
- [21] Ostrowski, A.M., On multiplication and factorization of polynomials, I. Lexicographic ordering and extreme aggregates of terms, *Aequationes Math.* **13** (1975) 201–228
- [22] Schmidt, W.M., *Equations over finite fields: an elementary approach*, *Lect. Notes Math.* **536**, Springer–Verlag, Berlin 1976
- [23] Shannon, C.E., A mathematical theory of communication, *Bell Syst. Tech. J.* **27** (1948) 379–423, 623–656
- [24] Stepanov, S.A., Congruences with two unknowns, *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.* **36** (1972) 683–711
- [25] Sturmfels, B., *Solving systems of polynomial equations*, *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI 2002
- [26] Webster, R., *Convexity*, Oxford Univ. Press, Oxford 1994
- [27] Wulff, G., Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Krystallflächen, *Z. Kryst.* **84** (1901) 449–530
- [28] Zador, P.L., Asymptotic quantization error of continuous signals and the quantization dimension, *IEEE Trans. Inform. Theory* **IT-28** (1982) 139–148

Peter M. Gruber
 Forschungsgruppe für Konvexe und Diskrete Geometrie
 TU Wien
 A–1040 Wien, Wiedner Hauptstasse 8–10/10460
 peter.gruber@tuwien.ac.at