Peter M. Gruber[1]

Über optimale Quantisierung

Zusammenfassung. Optimale Quantisierungen oder - damit äquivalent - minimale Summen von Momenten spielen in mehreren Zweigen der Mathematik und ihrer Anwendungen eine Rolle. Ausgehend von der Fejes Tóth'schen Ungleichung für Summen von Momenten in der euklidischen Ebene und einem zugehörigen Stabilitätssatz, werden gewisse Erweiterungen davon auf normierte Räume und riemannsche Mannigfaltigkeiten höherer Dimension besprochen. Ferner werden die minimierenden Konfigurationen grob beschrieben. Diese Ergebnisse werden dann auf Probleme aus folgenden Bereichen angewendet:
(i) Datenübertragung,
(ii) Wahrscheinlichkeitstheorie,
(iii) numerische Integration,
(iv) Approximation konvexer Körper und
(v) isoperimetrische Probleme.

MSC 2000. 52A27, 52B60, 52C99, 53C20, 65D30, 65D32, 94A24, 94A34.

Schlagwörter. Quantisierung, Summen von Momenten, Distorsion von Vektorquantisatoren, Quantisierung von Wahrscheinlichkeitsmaßen, Fehler numerischer Integrationsformeln, bestapproximierende Polytope, isoperimetrisches Problem für Polytope.

---

1 Einführung

1.1 Die Fragestellung. Es sei im euklidischen oder in einem allgemeineren Raum eine Menge J vorgelegt, ferner eine n–punktige Menge S_n. Greift man aus J einen beliebigen Punkt heraus und ersetzt ihn durch den nächstgelegenen Punkt von S_n, so macht man natürlich einen 'Fehler'. Wir betrachten nun den 'durchschnittlichen derartigen Fehler' und fragen, was ist sein kleinstmöglicher Wert. Weiter fragen wir nach den Mengen S_n, für welche dieser Wert angenommen oder wenigstens annähernd angenommen wird.

Äquivalent mit dieser Fragestellung ist die folgende. Es sei J wie oben, ferner seien eine Zerlegung von J in n Teilmengen $D_1, \dots, D_n$ gegeben und eine n–punktige Menge $\{p_1, \dots, p_n\}$. Wir betrachten nun eine Summe von 'Momenten' von D_i bezüglich p_i für i von 1 bis n – zur Veranschaulichung etwa eine

[1]Abteilung für Analysis, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstr.8-10/1142, A-1040 Wien. e-mail: peter.gruber@tuwien.ac.at

Summe von Trägheitsmomente – und fragen nach ihrem kleinstmöglichen Wert. Daneben erhebt sich die Frage nach den Zerlegungen und den Punktmengen, für welche dieser Minimalwert genau oder jedenfalls annähernd angenommen wird.

Erstaunlicherweise übersteigt eine genaue Antwort auf diese Fragen die gegenwärtigen Möglichkeiten, für grosse Werte von n kann man aber doch verhältnismässig präzise Aussagen machen. Es ist nicht überraschend, dass die Aussagen in der Dimension 2 sehr viel genauer sind, als die in höheren Dimensionen.

Diese, im ersten Moment ganz unspektakulären Fragen treten an sehr verschiedenen Stellen der Mathematik auf. Es ist daher nicht überraschend, dass die erzielten Aussagen eine ganze Reihe von sehr unterschiedlichen, interessanten Anwendungen haben.

1.2 Herkunft des Problemkreises. Die Thematik und die Ergebnisse des vorliegenden Berichts stammen aus ganz verschiedenen Quellen in der diskreten Geometrie, der Informationstheorie, der Wahrscheinlichkeitstheorie, der numerischen Integration und der Konvexgeometrie:

Ein Ergebnis von allgemeinem Charakter der diskreten Geometrie im Sinne der ungarischen Schule ist die Ungleichung von Fejes Tóth über Summen von Momenten. Abgesehen von eindimensionalen Ergebnissen ist sie vermutlich das früheste einschlägige Resultat. Sie ist durch eine Reihe von Anwendungen ausgezeichnet, vgl. Fejes Tóth [19] und Matérn und Persson [43].

In der Datenübertragung ist eines der Grundprobleme die Abbildung eines einkommenden Signals auf ein Codewort, das dann weiter übertragen wird, und die Untersuchung des dabei gemachten Fehlers im Anschluss an die Pionierarbeiten von Shannon und Zador, vgl. Gray und Neuhoff [25].

Ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß gegeben, ist es naheliegend zu fragen, wie gut man es durch diskrete Maße approximieren kann, vgl. Graf und Luschgy [36].

Eine der natürlichen Fragen bei numerischen Integrationsformeln ist die nach dem auftretenden Fehler. Dazu gibt es mehrere Ansätze. Unsere Thematik hängt mit russischen Arbeiten zusammen, die mit Babenko [1, 2] beginnen.

Probleme der Approximation konvexer Körper durch konvexe Polytope und damit verbundene isoperimetrische Fragestellungen führen ebenfalls zu dem hier behandelten Thema, vgl. Gruber [27, 29].

Der Zusammenhang der im Folgenden angeführten Ergebnisse mit Summen von Momenten und Quantisierung wird in den Abschnitten 3.4 und 4.1 deutlich.

1.3 Inhaltsübersicht. In diesem Bericht werden zuerst die Ungleichung von Fejes Tóth über Summen von Momenten in der euklidischen Ebene, ein Stabilitätssatz als Gegenstück dazu und gewisse Erweiterungen von beiden auf normierte Räume und riemannsche Mannigfaltigkeiten endlicher Dimension besprochen. Daran schließt sich eine Reihe von alternativen Interpretationen, bzw. von Anwendungen dieser Resultate an. Sie betreffen die Distorsion bei der Quantisierung von einkommenden Signalen, den Fehler bei der Approximation von Wahrscheinlichkeitsmaßen durch diskrete Maße, den Fehler bei numerischen Integrationsformeln für Klassen von Funktionen, welche verallgemeinerten Hölderbedingungen genügen, die Volumsapproximation konvexer Körper durch umschriebene Polytope und das isoperimetrische Problem für konvexe Polytope in Minkowskiräumen. In allen diesen Fällen werden auch Aussagen über die minimierenden Konfigurationen gemacht. Einige Beweisideen werden skizziert.

2 Allgemeine Ergebnisse in der Dimension 2

2.1 Die Momentenungleichung. Bezeichnen $\|\cdot\|_2, |\cdot|$ und $\#$ die euklidische Norm, den gewöhnlichen Inhalt oder das Lebesguemaß und die Anzahl, dann gilt nach L. Fejes Tóth das folgende Resultat.

Satz 1. *Es sei $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ monoton wachsend und H ein konvexes $3,4,5,$ oder 6-Eck in der Ebene $\mathbb{E}^2$. Dann gilt für $n=1,2,\ldots$ die Ungleichung*

$$(1)\qquad \inf_{\substack{S\subset\mathbb{E}^2\\ \#S=n}}\left\{\int\limits_H \min_{s\in S}\{f(\|s-u\|_2)\}du\right\}\geq n\int\limits_{H_n} f(\|u\|_2)du.$$

H_n ist dabei ein reguläres konvexes 6-Eck vom Inhalt $|H|/n$ und Mittelpunkt im Ursprung o.

Eine erste Version dieser Ungleichung, allerdings für die Sphäre anstelle der Ebene $\mathbb{E}^2$, hat L.Fejes Tóth 1948 in [17] angegeben, die obige Form findet sich zuerst in seinem Buch [19]. Weitere Beweise der Ungleichung, auch für die Sphäre und die hyperbolische Ebene, in einem Fall auch für eine bestimmte, nicht monotone Funktion f und für $f(t)=t^2$, stammen von L.Fejes Tóth [18], Imre [40], Bollobas und Stern [4], G.Fejes Tóth [15], Newman [44], Papadimitriou [46], Florian [20], Haimovich und Magnanti [38], Böröczky und Ludwig [6] und Gruber [31]. Keiner dieser teils geometrischen, teils analytischen Beweise ist einfach.

Für gewisse Funktionen f können sich die beiden Seiten der Ungleichung (1) für unendlich viele n um beliebig große Faktoren unterscheiden. Bei in zahlreichen Anwendungen auftretenden Funktionen f ist das aber nicht der Fall, im Gegenteil, es stimmen die beiden Seiten beinahe überein. Dann zeigt die Ungleichung, dass für die entsprechenden geometrischen und analytischen Probleme regulär hexagonale Anordnungen wenn schon nicht optimal, so doch beinahe optimal sind.

2.2 Erweiterung auf riemannsche 2-Mannigfaltigkeiten. In Hinblick auf Anwendungen ist eine Ausdehnung der Momentenungleichung von $\mathbb{E}^2$ auf 2-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeiten wünschenswert, wobei H durch eine jordanmessbare Menge zu ersetzen ist. Um möglichst viele Anwendungen zu erfassen, legen wir dem Folgenden einen sehr weiten Begriff von riemannschen Mannigfaltigkeiten zu Grunde. Für Details sei auf [32, 35] verwiesen. Ist M eine solche riemannsche Mannigfaltigkeit, dann bezeichnen ϱ_M und ω_M die zugehörige riemannsche Metrik und das zugehörige Maß. Eine Teilmenge J von M heißt *jordan-* oder *riemannmessbar*, wenn sie kompakten Abschluss hat und ihr Rand vom Maß 0 ist.

Bei einer Ausdehnung von Satz 1 von $\mathbb{E}^2$ auf 2-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeiten kann man im Allgemeinen keine Ungleichung wie in (1) erwarten. Um einen aussagekräftigen und anwendungsträchtigen Ersatz zu erhalten ist es daher naheliegend, nach asymptotischen Formeln zu suchen, die eine gut überschaubare Asymptotik aufweisen. Das scheint nur bei deutlicher Einschränkung für f möglich zu sein. Wir unterwerfen f der folgenden *Wachstumsbedingung*:

(2) $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ ist stetig, streng monoton wachsend, $f(0) = 0$ und für jedes feste $s > 1$ ist $f(st)/f(t)$ für $t > 0$ nach oben beschränkt und monoton fallend.

Neben den Funktionen f der Form $f(t) = t^\alpha$ ($\alpha > 0$ fest) gibt es viele weitere, die ebenfalls (2) genügen. Das zeigt folgendes Ergebnis, vgl. [35]:

Aussage 1. *Es sei $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ so, dass $f(t) = 0$ nur für $t = 0$ gilt und es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(u) = \log f(e^u)$ für $u \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*
(i) *f erfüllt die Wachstumsbedingung (2),*
(ii) *g ist streng monoton wachsend, konkav und lipschitzsch.*

Die folgende Erweiterung von Satz 1 von Gruber [32] auf riemannsche 2-Mannigfaltigkeiten ist — wie gefordert — für viele Funktionen f gültig und weist einfache Asymptotik auf. (Die Wachstumsbedingung in [32] ist eine Konsequenz der obigen Bedingung (2), jedenfalls für kleine Werte von t, was aber ausreicht.)

Satz 2. *Es genüge $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ der Wachstumsbedingung (2) und J sei eine jordanmessbare Menge in einer 2-dimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeit M mit $\omega_M(J) > 0$. Dann gilt:*

$$\text{(3)} \qquad \inf_{\substack{S \subset M \\ \#S = n}} \Big\{ \int\limits_J \min_{p \in S} \{ f(\varrho_M(p, x)) \} d\omega_M(x) \Big\} \sim n \int\limits_{H_n} f(\|u\|_2) du \text{ bei } n \to \infty.$$

H_n ist dabei ein reguläres 6-Eck in $\mathbb{E}^2$ mit Inhalt $\omega_M(J)/n$ und Mittelpunkt o. Eine analoge asymptotische Formel gilt auch unter der Voraussetzung $S \subset J$.

Beim Beweis wird die lokale Euklidizität von M sorgfältig ausgenützt und auf Hilfsmittel aus [31] zurückgegriffen.

Ohne besondere Schwierigkeiten sieht man, dass sich unter dem Integral auf der linken Seite in (3) noch eine Dichte einfügen lässt. Dann ist aber der Inhalt von H_n anders, vgl. den entsprechenden höherdimensionalen Fall in Abschnitt 3.

Ähnlich wie Satz 1, besagt auch Satz 2, dass für gewisse geometrische und analytische Probleme in $\mathbb{E}^2$ und $\mathbb{E}^3$ und auf riemannschen 2-Mannigfaltigkeiten annähernd regulär hexagonale Konfigurationen jedenfalls fast optimal sind.

2.3 Das zugehörige Stabilitätsproblem und die minimierenden Konfigurationen. Betrachtet man für $n = 1, 2, \ldots$, Mengen $S = S_n$ in $\mathbb{E}^2$ oder M, für die das Infimum in (1) bzw. (3) beinahe oder sogar genau angenommen wird, was kann man dann über S_n aussagen? Die Vermutung liegt nahe, dass S_n sehr gleichmäßig über J verteilt ist. Überraschenderweise ist das im Allgemeinen falsch. Schränkt man f aber geeignet ein, trifft die Vermutung zu.

Zuerst zwei Erklärungen für 'gleichmäßig verteilt': Es sei (S_n) eine Folge von Teilmengen von $\mathbb{E}^2$ oder M mit $\#S_n = n$ für $n = 1, 2, \ldots$, und (ϱ_n) eine positive reelle Folge. Dann heisst S_n *asymptotisch ein reguläres Sechseckmuster der Kantenlänge* ϱ_n *bei* $n \to \infty$, wenn im Fall $(S_n) \subset M$ folgendes erfüllt ist:

(4) Es gibt zwei Landausymbole $o(n)$ und $o(1)$, sodass für jeden Punkt $p \in S_n$ mit höchstens $o(n)$ Ausnahmen gilt,

$$B_M(p, 1{\cdot}1\varrho_n) \cap S_n = \{p, p_1, \ldots, p_6\},$$
$$\varrho_M(p, p_i), \varrho_M(p_i, p_{i+1}) = (1 \pm o(1))\varrho_n, i = 1, \ldots, 6, p_7 = p_1.$$

Hier wird mit $B_M(p, \varrho)$ die *Kreisscheibe* $\{x \in M : \varrho_M(p, x) \leq \varrho\}$ mit Mittelpunkt p und Radius ϱ bezeichnet und $(1 \pm o(1))\varrho_n$ bedeutet eine Größe zwischen $(1 - o(1))\varrho_n$ und $(1 + o(1))\varrho_n$. Der Fall $(S_n) \subset \mathbb{E}^2$ ist analog. Die Wahl des Radius der Kreisscheibe in (4) ist natürlich etwas willkürlich. Vgl. [28, 32]. Es sei nun $J \subset \mathbb{E}^2$ oder M jordanmessbar mit positivem Maß und $w : J \to \mathbb{R}^+$ integrierbar. Dann nennt man S_n *gleichverteilt in* J *bezüglich der Dichte* w *bei* $n \to \infty$, wenn im Fall $(S_n), J \subset M$ folgendes gilt:

(5) $$\#(K \cap S_n) \sim \frac{\int\limits_K w(x)d\omega_M(x)}{\int\limits_J w(x)d\omega_M(x)}\, n \text{ bei } n \to \infty$$

für jede jordanmessbare Menge $K \subset J$.

K enthält also für grosses n die ihm nach seinem Flächeninhalt zustehende Anzahl von Punkten von S_n. Der Fall $(S_n), J \subset \mathbb{E}^2$ ist analog. Der zweite Begriff von gleichmäßiger Verteilung lässt sich offenbar sofort auf höhere Dimensionen ausdehnen. Vgl. Hlawka [37]. Eine dritte Erklärung für 'gleichmässig verteilt', die nach Delone benannt ist, wird in Abschnitt 3.4 angegeben werden.

Wir geben nun folgende Stabilitätsaussage des Autors [30, 32] an:

Satz 3. *Es seien* f, M, J, H_n *wie in Satz 2. Ferner sei* (S_n) *eine Folge von Teilmengen von* M*, eventuell von* J*, mit* $\#S_n = n$ *für* $n = 1, 2, \ldots$*, sodass folgendes gilt:*

$$\int\limits_J \min_{p \in S_n}\{f(\varrho_M(p, x))\}d\omega_M(x) \sim n \int\limits_{H_n} f(\|u\|_2)du \text{ bei } n \to \infty.$$

Dann ist

(i) S_n *asymptotisch ein reguläres Sechseckmuster der Kantenlänge* $(2\omega_M(J)/\sqrt{3}n)^{1/2}$ *bei* $n \to \infty$ *und*

(ii) S_n *ist gleichverteilt in* J *bezüglich der Dichte* $w = 1$ *bei* $n \to \infty$.

Der Beweis ist schwierig.

Ein verwandtes Resultat für $\mathbb{E}^2$, wobei aber statt der Wachstumsbedingung (2) eine noch etwas allgemeinere geometrische Bedingung vorausgesetzt wird, hat G.Fejes Tóth [16] angegeben. Aus dem Satz 3 ergibt sich ein analoger Satz, bei dem unter dem linken Integral noch eine Dichte w eingefügt ist, indem man die riemannsche Metrik mit Hilfe der Dichte verändert und auf diese Situation den Satz anwendet. Vergleiche auch die entsprechenden höherdimensionalen Resultate in Abschnitt 3, bei denen eine Dichte gleich von vornherein hinzugenommen wird.

Satz 3 besagt, dass für gewisse geometrische und analytische Probleme in $\mathbb{E}^2$ und $\mathbb{E}^3$ und auf riemannschen 2-Mannigfaltigkeiten optimale und annähernd optimale Konfigurationen für große Werte von n beinahe regulär hexagonal sind.

3 Allgemeine Ergebnisse in höheren Dimensionen

3.1 Die Problemstellung. Vom Standpunkt einer Reihe von Anwendungen her sind Verallgemeinerungen der Ergebnisse des vorigen Abschnittes auf normierte Räume und riemannsche Mannigfaltigkeiten beliebiger endlicher Dimension erstrebenswert.

Wir präzisieren: Es sei $\|\cdot\|$ eine weitere Norm auf $\mathbb{E}^d$ und M eine d-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit. Ferner seien $f, \varrho_M, \omega_M, J$ wie oben und $w : J \to \mathbb{R}^+$ stetig oder jedenfalls integrierbar. Dann ist es wünschenswert, erstens folgende Ausdrücke zu bestimmen:

$$(6) \qquad \inf_{\substack{S \subset \mathbb{E}^d \\ \#S = n}} \Big\{ \int_J \min_{s \in S} \{ f(\|s - u\|) \} w(u)\, du \Big\},$$

$$(7) \qquad \inf_{\substack{S \subset M \\ \#S = n}} \Big\{ \int_J \min_{p \in S} \{ f(\varrho_M(p, x)) \} w(x)\, d\omega_M(x) \Big\},$$

eventuell auch unter der Voraussetzung $S \subset J$, und zweitens die *minimierenden Konfigurationen* $S = S_n$ zu beschreiben, d.h. die Mengen, für welche die Infima in (6) und (7) angenommen werden. Genaue Antworten auf diese Fragen sind außerhalb der gegenwärtigen Möglichkeiten, abgesehen von trivialen Fällen. Man kann aber wie für $d = 2$ Aussagen asymptotischer Natur machen.

3.2 Asymptotische Formeln. Zador [53, 54] hat gezeigt, dass für $f(t) = t^\alpha$ ($\alpha > 0$, fest) und $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ der Ausdruck in (6) bis auf eine positive multiplikative Konstante, die von α und $\|\cdot\|_2$ abhängt, asymptotisch gleich ist

$$\Big(\int_J w(u)^{\frac{d}{\alpha+d}} du\Big)^{\frac{\alpha+d}{d}} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{d}}} \text{ bei } n \to \infty.$$

Das analoge Resultat für den Ausdruck (7) für $\alpha = 2$ auf einer riemannschen d-Mannigfaltigkeit stammt von Gruber [28] und Glasauer und Gruber [23]. Babenko [1, 2] zeigt für $d = 2, f(t) = t^\alpha$ ($\alpha > 0$, fest) und $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, dass der Ausdruck in (6) asymptotisch gleich ist

$$\frac{12}{2+\alpha}\Big(\frac{1}{2\sqrt{3}}\Big)^{\frac{\alpha+2}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{(\cos t)^{\alpha+2}} \Big(\int_J w(u)^{\frac{\alpha+2}{2}}\Big)^{\frac{2}{\alpha+2}} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \text{ bei } n \to \infty.$$

Ferner zeigt er für $d = 2$, einen beliebigen Stetigkeitsmodul f, und für $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, dass im Falle $w = 1$ der Ausdruck in (6) asymptotisch gleich ist

$$n \int_{H_n} f(\|u\|_2) du,$$

mit H_n wie in Satz 1. Dabei heißt f ein *Stetigkeitsmodul*, falls gilt,

(8) $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ ist stetig, streng monoton wachsend, $f(0) = 0$ und es ist $f(s + t) \leq f(s) + f(t)$ für $s, t \geq 0$.

Weitere Ergebnisse von Babenko beziehen sich auf Normen, deren Einheitskugeln den $\mathbb{E}^d$ durch Translate pflastern. Chernaya [8, 9] zeigt folgendes: Es sei f ein Stetigkeitsmodul mit folgender Zusatzeigenschaft:

(9) Für $F : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definiert durch $F(t) = \int_0^t s^{d-1} f(s) ds$ für $t \geq 0$, ist $\lim_{t \to +0} F(st)/F(t)$ für jedes $s \geq 0$ vorhanden. (Wie man zeigt, ist dieser Limes dann gleich s^α mit einem passenden, festen $\alpha > 0$.)

Ferner sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{E}^d$. Dann ist bis auf eine nur von f und $\|\cdot\|$ abhängige positive multiplikative Konstante der Ausdruck (6) asymptotisch gleich

$$\Big(\int_J w(u)^{\frac{d}{\alpha+d}} du\Big)^{\frac{\alpha+d}{d}} n\, F\Big(\frac{1}{n^{\frac{1}{d}}}\Big) \text{ bei } n \to \infty.$$

Um später darauf verweisen zu können, werden die beiden folgenden Ergebnisse von Gruber [35] in Form von zwei Sätzen angeführt, wobei wir anmerken, dass aus (2) folgt,

(10) $\lim\limits_{t \to +0} f(st)/f(t)$ ist für jedes $s \geq 0$ vorhanden und gleich s^α mit einem passenden, festen $\alpha > 0$.

Die Bedingung (2) ist also geringfügig stärker als die Bedingung (9). cl stehe für Abschluss.

Satz 4. *Es genüge f der Wachstumsbedingung (2), es sei $\alpha > 0$ die zugehörige Konstante gemäß (10), und es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{E}^d$. Dann gibt es eine Konstante* div > 0, *die nur von f und $\|\cdot\|$ abhängt, sodass für jede jordanmessbare Menge J in $\mathbb{E}^d$ mit $|J| > 0$ und jede stetige Gewichtsfunktion $w : \operatorname{cl} J \to \mathbb{R}^+$ gilt:*

$$(11) \qquad \inf_{\substack{S \subset \mathbb{E}^d \\ \#S = n}} \Big\{ \int\limits_J \min_{s \in S} \{ f(\|s-u\|) \} w(u) du \Big\} \sim \operatorname{div} \Big(\int\limits_J w(u)^{\frac{d}{\alpha+d}} du \Big)^{\frac{\alpha+d}{d}} f\Big(\frac{1}{n^{\frac{1}{d}}} \Big)$$

bei $n \to \infty$. Eine analoge Aussage gilt auch unter der Voraussetzung $S \subset J$.

Die etwas ungewöhnlich anmutende Bezeichnung div für die in (11) auftretende Konstante wurde in [28] gewählt, um auf ihren Zusammenhang mit Dirichlet–Voronoizerlegungen hinzuweisen.

Satz 5. *Es genüge f der Wachstumsbedingung (2) und es sei $\alpha > 0$ die zugehörige Konstante gemäß (10). Dann gibt es eine Konstante* div > 0, *die nur von f und d abhängt, so dass für jede jordanmessbare Menge J von positivem Maß in einer d-dimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeit M und jede stetige Gewichtsfunktion $w : \operatorname{cl} J \to \mathbb{R}^+$ gilt:*

$$(12) \qquad \inf_{\substack{S \subset M \\ \#S = n}} \Big\{ \int\limits_J \min_{p \in S} \{ f(\varrho_M(p,x)) \} w(x) d\omega_M(x) \Big\}$$
$$\sim \operatorname{div} \Big(\int\limits_J w(x)^{\frac{d}{\alpha+d}} d\omega_M(x) \Big)^{\frac{\alpha+d}{d}} f\Big(\frac{1}{n^{\frac{1}{d}}} \Big)$$

bei $n \to \infty$. Eine analoge Aussage gilt auch unter der Voraussetzung $S \subset J$.

In den Beweisen, jedenfalls der höherdimensionalen Resultate, taucht unabhängig voneinander, bei allen Autoren eine Art Ähnlichkeitsargument auf, das zuerst von Hammersley Zador mitgeteilt wurde. Dieses Argument war bisher nicht zu umgehen. Will man übersichtlich gebaute asymptotische Aussagen unter Benutzung dieses Arguments erhalten, erzwingt das Einschränkungen für f wie bei Chernaya [8] ((8) und (9)) und Gruber [35] ((2)), vergleiche den Beweis der Aussage 3 in Abschnitt 3.3.

Über die Konstanten div weiss man einiges, siehe etwa Graf und Luschgy [36]. Wir erwähnen nur das Resultat von Zador [53, 54], dass für $f(t) = t^\alpha$ und $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ gilt,

$$\operatorname{div} \to \frac{1}{2\pi e} = 0.0585\ldots \text{ bei } d \to \infty.$$

3.3 Beweisideen. Wir erläutern einige Ideen, die zu einem Sonderfall der asymptotischen Formel (11) führen. Mit const werden positive reelle Konstanten bezeichnet. Tritt const im selben Zusammenhang mehrfach auf, muss damit nicht dieselbe Konstante gemeint sein.

Aussage 2. *Es sei* $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *monoton wachsend,* $f(0) = 0$, *und* $\|\cdot\|$ *eine Norm auf* $\mathbb{E}^d$. *Dann gilt für*

$$I([0,1]^d, n) = \inf_{\substack{S \subset \mathbb{E}^d \\ \#S = n}} \Big\{ \int\limits_{[0,1]^d} \min_{s \in S} \{f(\|s-u\|)\} du \Big\}$$

$$\text{const} f\Big(\frac{\text{const}}{n^{\frac{1}{d}}}\Big) \leq I([0,1]^d, n) \leq \text{const} f\Big(\frac{\text{const}}{n^{\frac{1}{d}}}\Big).$$

Beweisskizze. Es sei B die Einheitskugel der Norm $\|\cdot\|$. Wir schätzen zuerst $I([0,1]^d, n)$ nach unten ab. Dazu einige Vorbemerkungen. Erstens:

(13) Es sei $E \subset \mathbb{E}^d$ messbar, $s \in \mathbb{E}^d$ und $rB + s$ eine Kugel mit $|E| = |rB + s|$. Dann gilt

$$\int\limits_E f(\|s-u\|) du \geq \int\limits_{rB+s} f(\|s-u\|) du = \int\limits_{rB} f(\|u\|) du.$$

Dazu beachte man, dass das Maß des Bereichs $E \backslash (rB + s)$ gleich dem des Bereichs $(rB + s) \backslash E$ ist, im ersten Bereich $f(\|s - u\|)$ aber größere Werte annimmt. Zweitens:

$$\int\limits_{rB} f(\|u\|) du = d\,|B| \int\limits_0^r t^{d-1} f(t) dt \tag{14}$$

Das sieht man indem man die Kugel rB in 'Zwiebelschalen'$(t + dt)B \backslash tB$ vom Maß $d\,|B|\,t^{d-1} dt$ zerlegt und beachtet, dass f auf jeder solchen Zwiebelschale den Wert $f(t)$ annimmt. Drittens:

(15) Die Funktion $F : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definiert durch

$$F(v) = \int\limits_0^{v^{\frac{1}{d}} |B|^{-\frac{1}{d}}} t^{d-1} f(t) dt \text{ für } v > 0, \text{ ist konvex.}$$

Das trifft zu, denn $F'(v)$ ist monoton wachsend, wie man sich leicht überzeugt.

Nach diesen Vorbereitungen wählen wir Konfigurationen $S_n = \{s_{n1}, \ldots, s_{nn}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, für die das Infimum in Aussage 2 angenommen wird und betrachten die zugehörigen, verallgemeinerten *Dirichlet–Voronoizellen*

$$D_{ni} = \{u \in [0,1]^d : \|s_{ni} - u\| \leq \|s_{nj} - u\| \text{ für } j = 1, \ldots, n\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Diese sind kompakt, eventuell leer, und daher lebesguemessbar, aber möglicherweise überlappend, denn $\|\cdot\|$ ist ja nicht notwendig streng konvex. Es sei nun

$$E_{n1}=D_{n1},\ E_{n2}=D_{n2}\backslash D_{n1},\dots,\ E_{nn}=D_{nn}\backslash(D_{n1}\cup\dots\cup D_{nn-1}),$$
$$v_{ni}=|E_{ni}|,\ r_{ni}=v_{ni}^{\frac{1}{d}}|B|^{-\frac{1}{d}},\ i=1,\dots,n$$

Die E_{ni} sind alle lebesguemessbar, paarweise disjunkt und ihre Vereinigung ist gerade der Würfel $[0,1]^d$. Offenbar ist $f(\|s_{ni}-u\|)\le f(\|s_{nj}-u\|)$ für $u\in E_{ni}, j=1,\dots,n$. Daraus, aus (13), (14), (15) und der Jensen'schen Ungleichung für konvexe Funktionen folgt nun

$$\begin{aligned}
I([0,1]^d,n) &= \int\limits_{[0,1]^d}\min_{i=1,\dots,n}\{f(\|s_{ni}-u\|)\}\,du=\sum_{i=1}^n\int\limits_{E_{ni}}f(\|s_{ni}-u\|)\,du\\
&\ge\sum_{i=1}^n\int\limits_{r_{ni}B+s_{ni}}f(\|s_{ni}-u\|)\,du=\sum_{i=1}^n\int\limits_{r_{ni}B}f(\|u\|)\,du\\
&=d\,|B|\sum_{i=1}^n\int_0^{r_{ni}}t^{d-1}f(t)\,dt=d\,|B|\sum_{i=1}^n\int_0^{v_{ni}^{\frac{1}{d}}|B|^{-\frac{1}{d}}}t^{d-1}f(t)\,dt\\
&=d\,|B|\sum_{i=1}^n F(v_{ni})\ge d\,|B|\,n\,F\Big(\frac{v_{n1}+\dots+v_{nn}}{n}\Big)=d\,|B|\,n\,F\Big(\frac{1}{n}\Big)\\
&=d\,|B|\,n\int_0^{n^{-\frac{1}{d}}|B|^{-\frac{1}{d}}}t^{d-1}\,f(t)\,dt\ge d\,|B|\,n\,\frac{1}{2n^{\frac{1}{d}}|B|^{\frac{1}{d}}}\,\frac{1}{(2n^{\frac{1}{d}}|B|^{\frac{1}{d}})^{d-1}}f\Big(\frac{1}{2n^{\frac{1}{d}}|B|^{\frac{1}{d}}}\Big)\\
&\ge \mathrm{const}f\Big(\frac{\mathrm{const}}{n^{\frac{1}{d}}}\Big).
\end{aligned}$$

Nun schätzen wir $I([0,1]^d,n)$ nach oben ab. Offenbar kann man den Würfel $[0,1]^d$ für $n=1,2,\dots$ so durch n Kugeln vom Radius r_n überdecken, dass das Gesamtvolumen dieser Kugeln nach oben durch eine feste Konstante beschränkt ist, vgl. etwa Gruber und Lekkerkerker [36]. D.h.

$$n\,|r_nB|=n\,r_n^n\,|B|\le\mathrm{const}\text{ oder }r_n\le\frac{\mathrm{const}}{n^{\frac{1}{d}}}.$$

Es sei nun $T_n=\{t_{n1},\dots,t_{nn}\}$ die Menge der Mittelpunkte der Kugeln der n-ten Überdeckung. Dann gilt

$$\begin{aligned}
I([0,1]^d,n) &\le\int\limits_{[0,1]^d}\min_{i=1,\dots,n}\{f(\|t_{ni}-u\|)\}\,du\\
&\le\sum_{i=1}^n\int\limits_{r_nB+t_{ni}}f(\|t_{ni}-u\|)\,du=\sum_{i=1}^n\int\limits_{r_nB}f(\|u\|)\,du\\
&\le\sum_{i=1}^n|r_n\,B|\,f(r_n)\le n\,r_n^d\,|B|\,f(r_n)\le\mathrm{const}f\Big(\frac{\mathrm{const}}{n^{\frac{1}{d}}}\Big).\ \square
\end{aligned}$$

Betrachtet man die Aussage 2, so liegt die Vermutung nahe, dass für gewisse f asymptotische Formeln der Gestalt

$$I([0,1]^d, n) \sim \mathrm{const} f\Big(\frac{\mathrm{const}}{n^{\frac{1}{d}}}\Big) \text{ bei } n \to \infty,$$

oder besser, der Form

$$I([0,1]^d, n) \sim \mathrm{const} f\Big(\frac{1}{n^{\frac{1}{d}}}\Big) \text{ bei } n \to \infty$$

existieren. Da eine asymptotische Formel der letzteren Gestalt nicht für jedes f existieren kann, ist f passend einzuschränken, etwa auf solche f, bei denen $I([0,1]^d, kl^d)$ und $I([0,1]^d, k)$ für große Werte von k, l ähnlich zusammenhängen wie $f(1/k^{1/d}l)$ und $f(1/k^{1/d})$. Das hat zur Wachstumsbedingung (2) geführt und zu einer verwandten Bedingung (9) von Chernaya [8] für Stetigkeitsmoduln. Jedenfalls ist das im Falle $f(t) = t^\alpha$ ($\alpha > 0$, fest) erfüllt, den wir aus Gründen der Einfachheit weiter betrachten.

Aussage 3. *Es sei $f(t) = t^\alpha$ ($\alpha > 0$, fest) und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{E}^d$. Dann gibt es eine Konstante* div > 0, *die nur von $\|\cdot\|$ abhängt, mit*

$$I([0,1]^d, n) \sim \mathrm{div}\, \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{d}}} \text{ bei } n \to \infty.$$

Ist $\|\cdot\|$ so beschaffen, dass die zugehörige Einheitskugel B eine Pflasterung des Raumes durch Translate erlaubt, dann ist

$$\mathrm{div} = \frac{d}{(\alpha + d)|B|^{\frac{\alpha}{d}}}.$$

Beweisskizze für die asymptotische Formel. Wegen Aussage 2 mit $f(t) = t^\alpha$ sieht man,

$$\text{für } \mathrm{div} = \liminf_{n\to\infty} I([0,1]^d, n)\, n^{\frac{\alpha}{d}} \text{ gilt } \mathrm{div} \in \mathbb{R}^+.$$

Wir zeigen, dass man hier lim inf durch lim ersetzen kann, woraus die Behauptung

$$I([0,1]^d, n) \sim \mathrm{div} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{d}}} \text{ bei } n \to \infty \tag{16}$$

folgt, die zu zeigen ist. Es sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen ein k für welches Folgendes gilt:

$$I([0,1]^d, k)\, k^{\frac{\alpha}{d}} < (1 + \varepsilon)\, \mathrm{div}. \tag{17}$$

Nun betrachten wir n der Form $n = k\, l^d, l = 1, 2, \dots$. Es sei $S_k \subset [0,1]^d$ eine minimierende Konfiguration. $I([0,1]^d, k)$ ist dann das Volumen des 'Gebirgsstocks'

$$\{(u, v) : u \in [0,1]^d, 0 \le v \le \min_{s\in S_k}\{\|s - u\|^\alpha\}\}$$

mit k 'Tälern'. Durch die l^d Ähnlichkeiten

$$\begin{aligned}&u_1 \to \frac{u_1+a_1}{l}, \dots, u_d \to \frac{u_d+a_d}{l}, v \to \frac{v}{l^\alpha}\\ &a_1,\dots,a_d \in \{0,1,\dots,l-1\}\end{aligned}$$

erhalten wir daraus l^d Gebirgsstöcke mit je k Tälern. Zusammengefügt ergeben sie einen Gebirgsstock mit höchstens $k\,l^d$ Tälern vom Volumen

$$l^d \, \frac{1}{l^d\, l^\alpha}\, I([0,1]^d, k) = \frac{1}{l^\alpha}\, I([0,1]^d, k).$$

Dieser Gebirgsstock stimmt im Wesentlichen mit folgendem Gebirgsstock überein, genauer, er enthält ihn:

$$\{(u,v) : u \in [0,1]^d, 0 \le v \le \min_{\substack{s\in \frac{1}{l}(S_k+a)\\ a=(a_1,\dots,a_d)\\ a_i\in\{0,\dots,l-1\}}} \{\|s-u\|^\alpha\}\}.$$

Der letztere Gebirgsstock tritt aber in der Definition von $I([0,1]^d, k\,l^d)$ auf. Damit gilt

$$I([0,1]^d, k\,l^d) \le \frac{1}{l^\alpha}\, I([0,1]^d, k) \text{ für } l = 1,2,\dots,$$

oder

$$\text{(18)} \qquad I([0,1]^d, k\,l^d)\, k^{\frac{\alpha}{d}}\, l^\alpha \le I([0,1]^d, k)\, k^{\frac{\alpha}{d}} \le (1+\varepsilon)\,\mathrm{div} \text{ für } l = 1,2,\dots$$

nach (15). Es sei nun l_0 so groß, dass gilt

$$\text{(19)} \qquad \Big(\frac{l_0+1}{l_0}\Big)^\alpha \le 1+\varepsilon.$$

Wir zeigen

$$\text{(20)} \qquad I([0,1]^d, n)\, n^{\frac{\alpha}{d}} \le (1+\varepsilon)^2\,\mathrm{div} \text{ für } n \ge k\, l_0^d.$$

Für so ein n wählen wir $l \ge l_0$ so, dass $k\,l^d \le n < k\,(l+1)^d$ gilt. Dann ist nach Definition von I, (18) und (19)

$$\begin{aligned}I([0,1]^d, n)\, n^{\frac{\alpha}{d}} &\le I([0,1]^d, k\,l^d)\, (k\,(l+1)^d)^\alpha\\ &\le I([0,1]^d, k\,l^d)\, k^{\frac{\alpha}{d}}\, l^\alpha \Big(\frac{l+1}{l}\Big)^\alpha \le (1+\varepsilon)\,\mathrm{div}\Big(\frac{l_0+1}{l_0}\Big)^{\frac{\alpha}{d}}\\ &\le (1+\varepsilon)^2\,\mathrm{div}.\end{aligned}$$

Damit ist (20) gezeigt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus (16) und die asymptotische Formel ist bewiesen.

Der Beweis für den Ausdruck für div ergibt sich aus einer genauen Durchsicht des zweiten Teils des Beweises der Aussage 2. □

Einer jordanmessbaren Menge J in $\mathbb{E}^d$ mit $|J| > 0$ kann man eine endliche Familie von disjunkten Würfeln einschreiben und sie durch eine endliche Familie von Würfeln überdecken, so dass die Gesamtvolumina der beiden Würfelfamilien sich um beliebig wenig von $|J|$ unterscheiden. Die Aussage 3 führt dann zu der asymptotischen Formel

$$I(J,n) \sim \operatorname{div} |J|^{\frac{\alpha+d}{d}} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{d}}} \text{ bei } n \to \infty.$$

Schließlich beachte man, dass man eine stetige Funktion $w : J \to \mathbb{R}^+$ durch Treppenfunktionen beliebig genau annähern kann, wobei jede Treppenstufe über einem jordanmessbaren Teil von J liegt. Das führt dann zu der asymptotischen Formel in Satz 4 für $f(t) = t^\alpha$. $\square$

3.4 Die minimierenden Konfigurationen. Ist $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ monoton wachsend, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ oder zumindest $\|\cdot\|$ streng konvex, und sind $S_n = \{s_{n1}, \ldots, s_{nn}\}, n = 1, 2, \ldots$, minimierende Konfigurationen dann gilt offenbar

$$\int\limits_J \min_{i=1,\ldots,n} \{f(\|s_{ni} - u\|)\} w(u)du = \sum_{i=1}^n \int\limits_{D_{ni}} f(\|s_{ni} - u\|) w(u)du,$$

wobei die *Dirichlet–Voronoizellen* $D_{ni}, i = 1, \ldots, n$, in J, die S_n entsprechen, wie folgt definiert sind:

$$D_{ni} = \{u \in J : \|s_{ni} - u\| \le \|s_{nj} - u\| \text{ für } j = 1, \ldots, n\}.$$

Die Integrale unter dem Summenzeichen kann man als Momente deuten, woraus erhellt, warum man von *Summen von Momenten* spricht.

Die Beschreibung von minimierenden oder beinahe minimierenden Konfigurationen S_n und der zugehörigen Dirichlet–Voronoizellen ist schwierig, abgesehen vom Fall $d = 2$, der Norm $\|\cdot\|_2$ und der in den meisten Anwendungen auftretenden Funktionen f, siehe Abschnitt 2.3. Bekannte Algorithmen zur Bestimmung von solchen Konfigurationen liefern für $d \ge 3$ im Allgemeinen unbefriedigende Ergebnisse. Eine interessante *Vermutung von Gersho* [22] für $f(t) = t^2$ oder, allgemeiner, für streng monoton wachsendes f, die Norm $\|\cdot\|_2$ und $w = 1$ behauptet aber folgendes: Es gibt ein konvexes Polytop P, das eine Pflasterung des $\mathbb{E}^d$ durch kongruente Polytope zulässt, mit folgender Eigenschaft: Es seien für $n = 1, 2, \ldots$, die $D_{n1}, \ldots, D_{nn}$ die Dirichlet–Voronoizellen in J, die der minimierenden Konfiguration S_n entsprechen. Dann sind die Zellen $D_{n1}, \ldots, D_{nn}$ 'asymptotisch kongruent' zu $(|J|/n|P|)^{1/d} P$ bei $n \to \infty$. Für $d = 2$ ist diese Vermutung nach dem Stabilitätssatz in 2.3 richtig, sogar für riemannsche Mannigfaltigkeiten. Das scheint der erste vollständige Beweis für $d = 2$ zu sein. Hinweise in der Literatur, dass die Vermutung für $d = 2$ durch die Arbeiten [18] und [44] bestätigt wird, treffen nicht zu. Für $d \ge 3$ ist die Vermutung dagegen offen. Falls sie richtig ist, wird das Problem der Bestimmung minimierender oder beinahe minimierender Konfigurationen jedenfalls für $\|\cdot\|_2$ und einfach gebaute Funktionen f

auf die Bestimmung von 'Pflastersteinen', zurückgeführt, die gleichzeitig spezielle Dirichlet–Voronoizellen sind. Ein Beweis der Vermutung für $d \geq 3$ scheint extrem schwierig zu sein.

Unter der Annahme der Richtigkeit der Vermutung Gersho's wurden von mehreren Autoren untere Schranken für den Ausdruck in (6) für bestimmte f, für $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ und für $w = 1$ angegeben, vgl. die Literaturangaben bei Gray und Neuhoff [25]. Der Beweis der obigen Aussage 2 zeigt aber, dass man untere Schranken für diesen Ausdruck, selbst im allgemeinsten Fall, auch ohne die Vermutung von Gersho leicht erhalten kann.

Um das nächste Resultat angeben zu können, benötigen wir die folgenden Definitionen: Eine jordanmessbare Menge J heiße *von positiver Dichte*, wenn im Falle $J \subset \mathbb{E}^d$ gilt

$$|(\varrho B + p) \cap J| \geq \text{const } \varrho^d \text{ für } 0 < \varrho \leq \text{const}, p \in J,$$

und ähnlich im Falle $J \subset M$. Es sei nun neben J eine Folge (S_n) von Teilmengen von $\mathbb{E}^d$ oder von M mit $\#S_n = n$ für $n = 1, 2, \ldots,$ vorgelegt. Ferner sei eine Konstante $\delta > 1$ gegeben. Dann nennt man S_n für $n = 1, 2, \ldots,$ eine $(1/\delta n^{1/d}, \delta/n^{1/d})$–*Delonemenge*, falls je zwei verschiedene Punkte von S_n mindestens den Abstand $1/\delta n^{1/d}$ haben und es zu jedem Punkt von J einen Punkt in S_n mit Abstand höchstens $\delta/n^{1/d}$ gibt.

Damit kann man folgende Resultate des Autors [35] aussprechen, die erste, noch ungenaue Informationen über die geometrische und analytische Struktur der minimierenden Konfigurationen S_n für $d \geq 3$ geben; für $d = 2$ gibt es genauere Ergebnisse, siehe Abschnitt 2.3.

Satz 6. *Es sei $J \subset \mathbb{E}^d$ zusammenhängend, kompakt, jordanmessbar und von positiver Dichte. Ferner sei eine Funktion f mit zugehörigem α gemäß der Wachstumsbedingung (2) bzw. der Aussage (10) gewählt. $\|\cdot\|$ sei eine Norm auf dem $\mathbb{E}^d$ und $w : J \to \mathbb{R}^+$ sei eine stetige Gewichtsfunktion. Schliesslich sei (S_n) eine Folge minimierender Konfigurationen mit $\#S_n = n$. Dann gilt Folgendes:*

(i) *Es gibt ein $\delta > 1$, sodass S_n eine $(1/\delta n^{1/d}, \delta/n^{1/d})$-Delonemenge in J ist, $n = 1, 2, \ldots$.*

(ii) *S_n ist gleichverteilt in J bezüglich der Dichte $w^{d/(\alpha+d)}$ bei $n \to \infty$.*

Analoge Aussagen gelten auch unter der Voraussetzung $S, S_n \subset J$.

Satz 7. *Es sei $J \subset \mathbb{M}$ zusammenhängend, kompakt, jordanmessbar und von positiver Dichte. Ferner sei eine Funktion f mit zugehörigem α gemäß der Wachstumsbedingung (2) bzw. der Aussage (10) gewählt und $w : J \to \mathbb{R}^+$ sei eine stetige Gewichtsfunktion. Schliesslich sei (S_n) eine Folge minimierender Konfigurationen mit $\#S_n = n$. Dann gilt Folgendes:*

(i) *Es gibt ein $\delta > 1$, sodass S_n eine $(1/\delta n^{1/d}, \delta/n^{1/d})$-Delonemenge in J ist, $n = 1, 2, \ldots$.*

(ii) *S_n ist gleichverteilt in J bezüglich der Dichte $w^{d/(\alpha+d)}$ bei $n \to \infty$.*

Analoge Aussagen gelten auch unter der Voraussetzung$S, S_n \subset J$.

4 Minimale Distorsion bei Vektorquantisierung

4.1 Vektorquantisierung. Datenübertragungssysteme haben folgendes Schema:

$$x \longrightarrow \boxed{\text{Codierer}} \xrightarrow{c} \boxed{\text{Kanal}} \xrightarrow{c'} \boxed{\text{Decodierer}} \longrightarrow x'.$$

Eine Quelle erzeugt Signale. Im Codierer wird jedem einkommenden Signal x ein Codewort c zugeordnet, das einem Codebuch entnommen wird, welches aus endlich vielen Codewörtern besteht. Das Codewort c wird dann in einem Kanal übertragen. Durch Fehler bei der Übertragung im Kanal kann aus c ein Wort c' entstehen, aus dem der Decodierer dann ein Signal x' herstellt. Wir betrachten nun den Codierungsvorgang $x \to c$ näher und zwar in einem besonders wichtigen Spezialfall, vgl. Gray und Neuhoff [25].

Es seien $C_1, \ldots, C_n$ n jordanmessbare Mengen, die eine jordanmessbare Menge C im $\mathbb{E}^d$ pflastern und es seien $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{E}^d$. Das Vektor–$n$–Tupel $\{c_1, \ldots, c_n\}$ heisst *Codebuch*. Einem *Signal* $x \in C$ wird dann das *Codewort* oder der *Codevektor* c_i zugeordnet, für das $x \in C_i$ gilt. (Im Falle von Mehrdeutigkeit – die nur für eine Menge von Signalen x vom Maß 0 auftreten kann – wählt man als c_i irgendein Codewort mit $x \in C_i$.) Übliche Maße für die Qualität des so definierten *Codierers* oder *(Vektor-)Quantisators* auf C kann man wie folgt beschreiben: Es sei $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ monoton wachsend mit $f(0) = 0$, ferner $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{E}^d$ und $w : C \to \mathbb{R}^+$ stetig. Abgesehen von einer Normalisierung heißt w die *Dichte der Quelle*, welche die Signale x erzeugt. Dann wird die zugehörige *(durchschnittliche) Distorsion* des Quantisators definiert als der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(\|c_i - u\|) w(u) du.$$

Der wichtigste Fall ist $f(t) = t^2$ und $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Es erhebt sich die Frage, wie sollen die Zellen C_i und die Codevektoren c_i gewählt werden, damit die Distorsion minimiert wird? Sind $c_1, \ldots, c_n$ gegeben, dann wird offenbar die Distorsion minimiert, wenn $C_1 \subset D_1, \ldots, C_n \subset D_n$ gilt, wobei $D_1, \ldots, D_n$ die Dirichlet–Voronoizellen in C bezüglich $\|\cdot\|$ sind, die $c_1, \ldots, c_n$ entsprechen, d.h.

$$D_i = \{u \in C : \|c_i - u\| \leq \|c_j - u\| \text{ für } j = 1, \ldots, n\}, i = 1, \ldots, n.$$

Dann ist die Distorsion offenbar gleich

$$\int_C \min_{i=1,\ldots,n} \{f(\|c_i - u\|)\} w(u) du.$$

Die minimale Distorsion, die bei n Codevektoren überhaupt möglich ist, ist also gleich

$$\inf_{\substack{S \subset C \\ \#S = n}} \Big\{ \int_C \min_{s \in S} \{f(\|s - u\|)\} w(u) du \Big\}.$$

Für einen Literaturüberblick über die verschiedenen asymptotischen Formeln und Abschätzungen der minimalen Distorsion für spezielle f und $\|\cdot\|$ sei auf Gray und Neuhoff [25] verwiesen. Sehr detaillierte Untersuchungen über Vektorquantisierung findet man auch bei Graf und Luschgy [36]. Die Literatur beginnt mit den fundamentalen Arbeiten von Shannon [48] und Zador [53, 54]. In Shannon's Theorie wird die Minimaldistorsion für $d \to \infty$ untersucht, während in der Theorie von Zador der Fall $n \to \infty$ betrachtet wird.

Verwandte Fragestellungen treten auch auf dem Gebiet der Mustererkennung auf, wenn auch in anderer Terminologie, vgl. Duda, Hart und Stork [13].

4.2 Minimaldistorsion. Unsere Ergebnisse in 3.2 und 3.4 liefern asymptotische Formeln für die Minimaldistorsion und geben Information über die Struktur optimaler Codebücher. Speziell zeigen die Sätze 4 und 6 folgendes:

Satz 8. *Es genüge f der Wachstumsbedingung (2), es sei $\alpha > 0$ die zugehörige Konstante gemäß (10) und es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{E}^d$. Dann gibt es eine Konstante* $\operatorname{div} > 0$*, die nur von f und $\|\cdot\|$ abhängt, mit folgender Eigenschaft: Es sei $C \subset \mathbb{E}^d$ kompakt und jordanmessbar mit $|C| > 0$ und $w : J \to \mathbb{R}^+$ stetig. Dann ist die minimale Distorsion (bezüglich $f, \|\cdot\|$) eines Quantisators auf C mit Quelldichte w und n Codewörtern asymptotisch gleich*

$$\operatorname{div}\Big(\int\limits_C w(u)^{\frac{d}{\alpha+d}} du\Big)^{\frac{\alpha+d}{d}} f\Big(\frac{1}{n^{\frac{1}{d}}}\Big) \text{ bei } n \to \infty.$$

Ist C zusätzlich zusammenhängend und von positiver Dichte, so gilt auch folgendes: Es sei (S_n) eine Folge von Codebüchern in C mit $\#S_n = n$ und so, dass S_n die Distorsion minimiert, $n = 1, 2, \ldots$. Dann gelten folgende Behauptungen:

(i) *Es gibt ein $\delta > 1$, sodass S_n eine $(1/\delta n^{1/d}, \delta/n^{1/d})$-Delonemenge in J ist, $n = 1, 2, \ldots$.*

(ii) *S_n ist in C gleichverteilt bezüglich der Dichte $w^{d/(\alpha+d)}$ bei $n \to \infty$.*

Wir weisen darauf hin, dass auch die Sätze 5 und 7 zu verwandten Aussagen führen, die einen gewissen Praxisbezug haben, vgl. Gray und Neuhoff [25] und die dort besprochene Arbeit von Gardner und Rao [21]. Im Falle $d = 2$ kann man entsprechend den Sätzen 2 und 3 sehr viel genauere Aussagen treffen.

5 Minimalfehler bei der Approximation von Wahrscheinlichkeitsmaßen durch diskrete Maße

5.1 Quantisierung von Maßen. Es sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ monoton wachsend mit $f(t) = 0$ nur für $t = 0$ und$\|\cdot\|$ sei eine Norm auf $\mathbb{E}^d$. Dann kann man auf dem Raum aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem $\mathbb{E}^d$ einen Abstandsbegriff wie folgt definieren: Sind P, Q solche Maße, dann sei

$$\rho^f(P,Q) = \inf\Big\{ \int\limits_{\mathbb{E}^d \times \mathbb{E}^d} f(\|x-y\|) d\mu(x,y) \Big\},$$

wobei das Infimum über alle borelschen Wahrscheinlichkeitsmaße μ auf $\mathbb{E}^d \times \mathbb{E}^d$ zu erstrecken ist, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$P(B) = \int\limits_{B \times \mathbb{E}^d} d\mu(x,y),\ Q(C) = \int\limits_{\mathbb{E}^d \times C} d\mu(x,y) \text{ für alle Borelmengen } B, C \subset \mathbb{E}^d.$$

ρ^f ist eine leichte Erweiterung der *Wasserstein-* oder *Kantorovichmetrik* auf dem Raum aller Wahrscheinlichkeitsmaße. Es erhebt sich die Frage, wie gut man ein Wahrscheinlichkeitsmaß durch diskrete Maße approximieren kann und wie die Träger dieser Maße aussehen. Es sei $\mathcal{D}_n$ der Raum der diskreten Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem $\mathbb{E}^d$, deren Träger aus höchstens n Punkten besteht, $n = 1, 2, \dots$. Dann erhält man für den *Fehler bei der Bestapproximation von P durch Wahrscheinlichkeitsmaße aus $\mathcal{D}_n$* folgende Darstellung:

$$\rho^f(P, \mathcal{D}_n) = \inf_{D \in \mathcal{D}_n} \{\rho^f(P,D)\} = \inf_{\substack{S \subset \mathbb{E}^d \\ \#S = n}} \Big\{ \int_{\mathbb{E}^d} \min_{s \in S} \{ f(\|u-s\|)\} dP(u) \Big\}.$$

Dafür und für weiterführende Literatur sei auf das sehr eingehende Buch von Graf und Luschgy [36] verwiesen.

5.2 Minimalfehler. Aus den Sätzen 3 und 4 erhält man folgende asymptotischen Aussagen über den Minimalfehler bei der Approximation von Wahrscheinlichkeitsmaßen, die eine stetige Dichte haben, durch diskrete und eine Beschreibung der Träger der bestapproximierenden Maße.

Satz 9. *Es genüge f der Wachstumsbedingung (2), es sei $\alpha > 0$ die zugehörige Konstante gemäß (10) und es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{E}^d$. Dann gibt es eine Konstante* div > 0*, die nur von f und $\|\cdot\|$ abhängt, mit folgender Eigenschaft: Es sei $J \subset \mathbb{E}^d$ kompakt und jordanmessbar mit $|J| > 0$ und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf J mit stetiger Dichte $p : J \to \mathbb{R}^+$. Dann ist der Fehler bei der Bestapproximation von P durch Wahrscheinlichkeitsmaße aus $\mathcal{D}_n$ asymptotisch gleich*

$$\operatorname{div}\Big(\int\limits_J p(u)^{\frac{d}{\alpha+d}} du \Big)^{\frac{\alpha+d}{d}} f\Big(\frac{1}{n^{\frac{1}{d}}}\Big) \text{ bei } n \to \infty.$$

Ist J zusätzlich zusammenhängend und von positiver Dichte, so gilt auch folgendes: Es sei (S_n) eine Folge von Trägern in J mit $\#S_n = n$ und so, dass passende zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaße den Fehler minimieren, $n = 1, 2, \dots$. Dann gilt Folgendes:

(i) *Es gibt ein $\delta > 1$, sodass S_n eine $(1/\delta n^{1/d}, \delta/n^{1/d})$-Delonemenge in J ist, $n = 1, 2, \ldots$.*

(ii) *S_n ist in J gleichverteilt bezüglich der Dichte $w^{d/(\alpha+d)}$ bei $n \to \infty$.*

Aus den Sätzen 5 und 7 erhält man ein ähnliches Resultat. Im Falle $d = 2$ ergibt sich eine weitgehende Verschärfung des letzteren Resultats aus den Sätzen 2 und 3.

6 Minimalfehler bei numerischen Integrationsformeln

6.1 Fehler bei numerischen Integrationsformeln. Es sei $J \subset \mathbb{E}^d$ eine jordanmessbare Menge, $\mathcal{F}$ eine Klasse riemannintegrierbarer Funktionen auf J und $w : J \to \mathbb{R}$ eine riemannintegrierbare Funktion, eine *Gewichtsfunktion*. Sind $K = \{s_1, \ldots, s_n\} \subset J$ und $W = \{w_1, \ldots, w_n\} \subset \mathbb{R}$, eine *Knotenpunktmenge* und eine *Menge von Gewichten*, dann definiert man den *Fehler* der numerischen Integrationsformel

$$\int_J g(u)w(u)du \approx \sum_{i=1}^n w_i g(s_i) \text{ für } g \in \mathcal{F}$$

durch

$$E(\mathcal{F}, w, K, W) = \sup_{g \in \mathcal{F}} \Big\{ \Big| \int_J g(u)w(u)du - \sum_{i=1}^n w_i g(s_i) \Big| \Big\}.$$

Der *Minimalfehler* solcher Integrationsformeln für die Klasse $\mathcal{F}$ und die Gewichtsfunktion w ist dann

$$E(\mathcal{F}, w, n) = \inf_{\substack{K \subset J, \# K = n \\ W \subset \mathbb{R}, \# W = n}} \{E(\mathcal{F}, w, K, W)\}.$$

Es entsteht das Problem, den Minimalfehler zu bestimmen und die minimierenden Knotenpunkt- und Gewichtsmengen zu beschreiben.

6.2 Minimalfehler. Exakte Lösungen dieser Fragen stehen in weiter Ferne, man kann aber doch einige Aussagen machen: Für Funktionen von mehreren Veränderlichen, die im Sinne von Hardy und Krause beschränkte Variation haben, lässt sich der Fehler einer numerischen Integrationsformel nach der Ungleichung von Koksma und Hlawka durch die Variation und die sogenannte Diskrepanz der Knotenpunktmenge nach oben abschätzen. Vgl. Hlawka [37]. Für Sobolevräume von Funktionen haben sich Sobolev [51] und seine Schule, etwa auch Polovinkin [47], mit den obigen Fragen beschäftigt. Parallel dazu haben Babenko [1, 2], Korneichuk [41] und in jüngerer Zeit Chernaya [8, 9] für Klassen von Funktionen von folgender Art asymptotische Aussagen über den Minimalfehler gemacht: Es sei f ein Stetigkeitsmodul, $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{E}^d$ und $J \subset \mathbb{E}^d$ eine jordanmessbare Menge. Dann sei $\mathcal{H}^f(\|\cdot\|, J)$ die folgendermaßen definierte *Hölderklasse mit Stetigkeitsmodul* f von reellen Funktionen auf J:

$$\mathcal{H}^f(\|\cdot\|, J) = \{g : J \to \mathbb{R} : |g(u) - g(v)| \le f(\|u - v\|) \text{ für } u, v \in J\}.$$

Wir geben nur das letzte Resultat von Chernaya [8] an, das die früheren Resultate im Wesentlichen umfasst: Es sei $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ ein Stetigkeitsmodul, der die Bedingung (9) erfüllt. Dann gilt für jede jordanmessbare Menge $J \subset \mathbb{E}^d$ mit $|J| > 0$, jede Norm $\|\cdot\|$ und jede Gewichtsfunktion $w : J \to \mathbb{R}^+$

$$E(\mathcal{H}^f, w, n) \sim \text{const} \Big(\int\limits_J w(u)^{\frac{d}{\alpha+d}}\, du \Big)^{\frac{\alpha+d}{d}} n\, F\Big(\frac{1}{n^{\frac{1}{d}}}\Big) \text{ bei } n \to \infty,$$

$$\text{mit } F(t) = \int\limits_0^t s^{d-1} f(s) ds \text{ fur } t \ge 0.$$

Dabei ist const eine nur von f und $\|\cdot\|$ abhängige Konstante. Da es sich hier um Stetigkeitsmoduln handelt, zeigt die Bemerkung vor Satz 4 dass diese asymptotische Formel um eine Spur allgemeiner ist als die in folgendem Satz. Letzterer enthält auch noch andere Information und ergibt sich unmittelbar aus den Sätzen 4 und 6:

Satz 10. *Es sei $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ ein Stetigkeitsmodul, welcher der Wachstumsbedingung (2) genügt, es sei $\alpha > 0$ die zugehörige Konstante gemäß (10) und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{E}^d$. Dann gibt es eine Konstante* div > 0, *die nur von f und $\|\cdot\|$ abhängt, sodass folgendes gilt: Ist $J \subset \mathbb{E}^d$ kompakt und jordanmessbar mit $|J| > 0$ und $w : J \to \mathbb{R}^+$ stetig und $\mathcal{H}^f = \mathcal{H}^f(\|\cdot\|, J)$, dann gilt:*

$$E(\mathcal{H}^f, w, n) \sim \text{div} \Big(\int\limits_J w(u)^{\frac{d}{\alpha+d}}\, du \Big)^{\frac{\alpha+d}{d}} f\Big(\frac{1}{n^{\frac{1}{d}}}\Big) \text{ bei } n \to \infty.$$

Ist J zusätzlich zusammenhängend und von positiver Dichte, so gilt auch folgendes: Es sei (K_n) eine Folge von Knotenmengen in J mit $\#K_n = n$, sodass K_n (zusammen mit passenden Mengen W_n von Gewichten) den Fehler $E(\mathcal{H}^f, w, K_n, W_n)$ minimiert, $n = 1, 2, \dots$. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) *Es gibt ein $\delta > 1$, sodass K_n eine $(1/\delta n^{1/d}, \delta/n^{1/d})$-Delonemenge in J ist, $n = 1, 2, \dots$.*
(ii) *K_n ist in J gleichverteilt bezüglich der Dichte $w^{d/(\alpha+d)}$ bei $n \to \infty$.*

Zieht man die Sätze 5 und 7 heran, erhält man ein analoges Resultat für riemannsche Mannigfaltigkeiten, speziell für die Sphäre und den hyperbolischen Raum.

Beweisskizze. Zum Beweis von Satz 9 genügt die im Wesentlichen schon bei Babenko [1] auftretende Bemerkung, dass für den Minimalfehler gilt

$$(21) \qquad E(\mathcal{H}^f, w, n) = \inf_{\substack{K \subset J \\ \#K = n}} \left\{ \int_J \min_{s \in K} \{ f(\|s-u\|) \} w(u) du \right\}$$

und der Hinweis auf die Sätze 4 und 6. Die Aussage (21) überlegt man sich wie folgt: Zuerst zeigt man,

> ist $K = \{s_1, \ldots, s_n\} \subset J$, dann ist $h \in \mathcal{H}^f$, wobei $h : J \to \mathbb{R}$ die durch $h(u) = \min_{s \in K} \{f(\|s-u\|)\}$ für $u \in J$ definierte Funktion ist.

Damit beweist man folgendes:

> Es seien $K = \{s_1, \ldots, s_n\} \subset J$ und $W = \{w_1, \ldots, w_n\} \subset \mathbb{R}$. Ferner sei $D_i = \{u \in J : \|s_i - u\| \leq \|s_j - u\| \text{ für } j = 1, \ldots, n\}, i = 1, \ldots, n$. Ist dann
>
> $$E_i = D_i \backslash (D_1 \cup \ldots \cup D_{i-1}), \overline{w}_i = \int_{E_i} w(u)\, du, i = 1, \ldots, n, \overline{W} = \{\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_n\},$$
>
> so gilt
>
> $$E(\mathcal{H}^f, w, K, W) \geq E(\mathcal{H}^f, w, K, \overline{W}) = \int_J h(u) w(u)\, du$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} E(\mathcal{H}^f, w, n) &= \inf_{\substack{K \subset J, \#K = n \\ W \subset \mathbb{R}, \#W = n}} \{E(\mathcal{H}^f, w, K, W)\} = \inf_{\substack{K \subset J \\ \#K = n}} \{E(\mathcal{H}^f, w, K, \overline{W})\} \\ &= \inf_{\substack{K \subset J \\ \#K = n}} \left\{ \int_J h(u) w(u)\, du \right\} = \inf_{\substack{K \subset J \\ \#K = n}} \left\{ \int_J \min\{f(\|s-u\|)\} w(u)\, du \right\} \end{aligned}$$

und (21) ist bewiesen. □

7 Volumsapproximation konvexer Körper

7.1 Das Approximationsproblem. Es sei C ein *konvexer Körper* des $\mathbb{E}^d$, d.h. eine kompakte, konvexe Teilmenge des $\mathbb{E}^d$ mit nichtleerem Inneren. Unter $\mathcal{P}^c_{(n)}$ verstehen wir dann die Menge aller C umschriebenen konvexen Polytope mit höchstens n Facetten, $n = d+1, d+2, \ldots$. Die symmetrische Differenzmetrik auf dem Raum aller konvexen Körper des $\mathbb{E}^d$ werde mit $\delta^V(\cdot, \cdot)$ bezeichnet. Dann erheben sich folgende Probleme: Man bestimme die folgende Größe

$$\delta^V(C, \mathcal{P}^c_{(n)}) = \inf\{\delta^V(C, P) : P \in \mathcal{P}^c_{(n)}\},$$

oder schätze sie wenigstens ab, und beschreibe die Polytope $P \in \mathcal{P}^c_{(n)}$, für welche das Infimum angenommen wird, die *bestapproximierenden Polytope* von C in $\mathcal{P}^c_{(n)}$

bezüglich δ^V. Zu diesen und verwandten Problemen gibt es eine umfangreiche Literatur. Überblicke dazu findet man in [27, 29].

7.2 Bestapproximation. Exakte Antworten auf die obigen Probleme sind gegenwärtig wohl unerrreichbar, abgesehen von trivialen Sonderfällen. Für $n \to \infty$ kann man aber doch einiges sagen. Aus dem Satz 5 und dem Beweis von Satz 7 von oben erhält man folgendes Resultat:

Satz 11. *Es gibt eine Konstante* $\operatorname{div}_{d-1} > 0$, *die nur von* d *abhängt, sodass folgendes gilt: Es sei* C *ein konvexer Körper im* $\mathbb{E}^d$ *(mit Rand) von der Klasse* $\mathcal{C}^3$ *und positiver gaußscher Krümmung* κ_C. *Dann gilt:*

$$\delta^V(C, \mathcal{P}^c_{(n)}) \sim \frac{1}{2}\operatorname{div}_{d-1}\Big(\int_{\operatorname{bd} C} \kappa_C(x)^{\frac{1}{d+1}} d\sigma(x)\Big)^{\frac{d+1}{d-1}} \frac{1}{n^{\frac{2}{d-1}}} \text{ bei } n \to \infty.$$

Ferner sei $(P_n), P_n \in \mathcal{P}^c_{(n)}$, *eine Folge bestapproximierender Polytope von* C. *Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) Es gibt ein $\delta > 1$, *sodass der Inradius jeder Facette von* P_n *mindestens* $1/\delta n^{1/(d-1)}$ *und der Umradius höchstens* $\delta/n^{1/(d-1)}$ *ist,* $n = d+1, d+2, \ldots$.

(ii) Die 'Berührmengen' $C \cap \operatorname{bd} P_n$ *von* C *mit dem Rand von* P_n *sind gleichverteilt in* $\operatorname{bd} C$ *bei* $n \to \infty$ *bezüglich der Dichte* $\kappa_C^{1/(d+1)}$, *falls* $\operatorname{bd} C$ *mit dem gewöhnlichen Oberflächenmaß* σ *ausgestattet ist.*

Die asymptotische Formel wurde erstmals in [28] für konvexe Körper der Klasse $\mathcal{C}^2$ bewiesen. Wesentliche Verschärfungen der Formel haben Böröczky [5] und Gruber [34] angegeben. Die Aussage über In- und Umradius der Facetten findet sich in [35] und Glasauer und Gruber [23] fanden erstmals die Aussage über die Gleichverteilung der Berührmenge. Für $d = 3$ lassen sich schärfere Aussagen machen, vgl. [32, 33].

Beweisidee für die asymptotische Formel. Ist $y \in \operatorname{bd} C$, dann bezeichne $H_C(y)$ die Stützebene von C durch den Punkt y. Für $x, y \in \operatorname{bd} C$ sei $\operatorname{dist}(x, H_C(y))$ die Entfernung von x von der Stützebene von C durch y. Mit ρ_{II} und ω_{II} werden die riemannsche Metrik und das riemannsche Maß auf $\operatorname{bd} C$ bezeichnet, die durch die zweite Fundamentalform bestimmt werden. Dann gilt bekanntlich,

$$\operatorname{dist}(x, H_C(y)) \approx \frac{1}{2}\rho_{II}(x,y)^2 \text{ für nahe beisammen gelegene } x, y \in \operatorname{bd} C.$$

Ist nun F eine Facette eines C umschriebenen konvexen Polytops P, die C im Punkt p_F berührt, dann ist das Volumen des 'zwischen' F und C gelegenen Bereichs ungefähr gleich

$$\frac{1}{2}\int\limits_{F'} \rho_{II}(y,x)^2 d\sigma(x),$$

wobei F' die 'Projektion'von F in $\operatorname{bd} C$ ist. Summiert man über alle Facetten F, erhält man

$$\delta^V(C,P) \approx \frac{1}{2}\sum_F \int_{F'} \rho_{II}(p_F,x)^2 d\sigma(x) \approx \frac{1}{2}\int_{\operatorname{bd} C} \min_F\{\rho_{II}(p_F,x)^2\} d\sigma(x).$$

Sind ρ_{EA} und ω_{EA} die riemannsche Metrik und das riemannsche Maß auf $\operatorname{bd} C$ der äquiaffinen Differentialgeometrie, dann gelten folgende Zusammenhänge:

$$\rho_{II}(p,x)^2 \approx \kappa_C(x)^{\frac{1}{d+1}} \rho_{EA}(p,x)^2 \text{ und } d\omega_{EA}(x) = \kappa_C(x)^{\frac{1}{d+1}} d\sigma(x).$$

Damit ist

$$\delta^V(C,P) \approx \frac{1}{2}\int_{\operatorname{bd} C} \min_F\{\rho_{EA}(p_F,x)^2\} d\omega_{EA}(x).$$

Nun wendet man Satz 5 an. □

8 Das isoperimetrische Problem für konvexe Polytope in Minkowskiräumen

8.1 Das isoperimetrische Problem. Im $\mathbb{E}^d$ sei neben der euklidischen Norm eine weitere Norm gegeben. In diesem neuen normierten Raum oder Minkowskiraum ist der natürliche Maßbegriff, wenn man an die Forderung der Translationsinvarianz denkt, bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig, und es handelt sich um das Lebesguemaß. Beim Oberflächenmaßbegriff treten aber sofort mehrere, wesentlich verschiedene, natürliche Kandidaten auf, zum Beispiel das (d-1)-dimensionale Hausdorffmaß bezüglich der durch die Norm gegebenen Metrik, zuerst näher untersucht von Busemann [7], oder die von Holmes–Thompson [39] und von Benson [3] eingeführten Oberflächenmaße. Alle diese Begriffe laufen auf Folgendes hinaus: In $\mathbb{E}^d$ wird ein mit der neuen Norm zusammenhängender konvexer Körper I, die *Isoperimetrix*, betrachtet. Das zugehörige *Oberflächenmaß* eines konvexen Körpers C wird dann definiert durch

$$S_I(C) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{|C+\varepsilon I| - |C|}{\varepsilon}, \text{ mit } C+\varepsilon I = \{x+\varepsilon y : x \in C,\, y \in I\}.$$

Für die euklidische Norm ist I einfach die euklidische Einheitskugel und S_I das gewöhnliche (minkowskische) Oberflächenmaß. Vgl. das Buch von Thompson [52].

Damit stehen in unserem normierten Raum das Lebesguemaß und mehrere natürliche Oberflächenmaße zur Verfügung. Es ist nun naheliegend, mit diesen Begriffen isoperimetrische Probleme zu betrachten, zum Beispiel das folgende: Unter den konvexen Polytopen P in $\mathbb{E}^d$ mit höchstens n Facetten, $n = d+1, d+2, \dots$ sind denjenigen gesucht, für die der*isoperimetrische Quotient*

$$\frac{S_I(P)^d}{|P|^{d-1}}$$

minimal ist und dessen Wert.

8.2 Konvexe Polytope mit minimalem isoperimetrischen Quotienten. Ist ein konvexes Polytop mit höchstens n Facetten und minimalem isoperimetrischen Quotienten vorgelegt, dann sagt ein Resultat von Diskant [11, 12], das einen Satz von Lindelöf [42] für den euklidischen Fall verallgemeinert, folgendes: Nachdem man das Polytop einer passenden Ähnlichkeitstransformation unterworfen hat, ist es der Isoperimetrix I umschrieben. Ähnlichkeitstransformationen ändern aber nichts am isoperimetrischen Quotienten. Es hat also auch das I umschriebene Polytop P_n minimalen isoperimetrischen Quotienten unter allen konvexen Polytopen mit n Facetten. Beachtet man die Definition von S_I, so sieht man leicht, das gilt,

$$\frac{S_I(P_n)^d}{|P_n|^{d-1}} = d^d |P_n|.$$

Da der isoperimetrische Quotient für P_n minimal ist unter allen konvexen Polytopen, die I umschrieben sind und höchstens n Facetten haben, so hat P_n unter allen solchen Polytopen minimales Volumen und ist daher bestapproximierend für I im Sinne der symmetrischen Differenzmetrik. Aus dem Satz 11 ergibt sich also folgendes Resultat:

Satz 12. *Es gibt eine Konstante* $\operatorname{div}_{d-1} > 0$*, die nur von* d *abhängt, sodass folgendes gilt: Es sei* I *eine Isoperimetrix in* $\mathbb{E}^d$ *(mit Rand) von der Klasse* $\mathcal{C}^3$ *mit positiver gaußscher Krümmung* κ_I*. Ferner sei* P_n *ein* I *umschriebenes konvexes Polytop mit höchstens* n *Facetten und minimalem isoperimetrischen Quotienten,* $n = d+1, d+2, \ldots$. *Dann gilt für den isoperimetrischen Quotienten*

$$\frac{S_I(P_n)^d}{|P_n|^{d-1}} \sim d^d|I| + \frac{d^d}{2}\operatorname{div}_{d-1}\Big(\int_{\operatorname{bd} I} \kappa_I(x)^{\frac{1}{d+1}}\, d\sigma(x)\Big)^{\frac{d+1}{d-1}} \frac{1}{n^{\frac{2}{d-1}}} \quad \text{bei } n \to \infty.$$

Weiter gilt für die Polytope P_n *folgendes:*

(i) *Es gibt ein* $\delta > 1$*, sodass der Inradius jeder Facette von* P_n *mindestens* $1/\delta n^{1/(d-1)}$ *ist und der Umradius höchstens* $\delta / n^{1/(d-1)}$ *für* $n = d+1, d+2, \ldots$.

(ii) *Die 'Berührmengen'* $I \cap \operatorname{bd} P_n$ *von* I *mit dem Rand von* P_n *sind gleichverteilt in* $\operatorname{bd} I$ *bei* $n \to \infty$ *bezüglich der Dichte* $\kappa_I^{1/(d+1)}$*; dabei ist* $\operatorname{bd} I$ *mit dem gewöhnlichen Oberflächenmaß* σ *ausgestattet.*

Für $d = 2, 3$ lassen sich wesentlich schärfere Aussagen machen, siehe [30, 32, 33].

Anerkennung. Für wertvolle Diskussionen und Literaturhinweise danke ich den Herren Graf, Luschgy, Novak und Wertz sehr herzlich.

Literatur

[1] Babenko, V.F., Asymptotically sharp bounds for the remainder for the best quadrature formulas for several classes of functions, Mat. Zametki **19** (1976) 313–322, Math. Notes **19** (1976) 187-193

[2] Babenko, V.F., On the optimal error bound for cubature formulas on certain classes of continuous functions, Anal. Math. **3** (1977) 3–9

[3] Benson, R.V., Euclidean geometry and convexity, McGraw-Hill, New York 1966

[4] Bollobas, B., Stern, N., The optimal structure of market areas, J. Economic Theory **4** (1972) 174–179

[5] Böröczky, K.Jr., The error of polytopal approximation with respect to the symmetric difference metric and the L^p metric, Israel J. Math. **117** (2000) 1–28

[6] Böröczky, K.Jr., Ludwig, M., Approximation of convex bodies and a momentum lemma for power diagrams, Mh. Math. **127** (1999) 101–110

[7] Busemann, H., The foundations of Minkowskian geometry, Comment. Math. Helv. **24** (1950) 156–187

[8] Chernaya(=Chornaya), E.V., On the optimization of weighted cubature formulae on certain classes of continuous functions, East J. Approx. **1** (1995) 47–60

[9] Chernaya, E.V., An asymptotic sharp estimate for the remainder of weighted cubature formulas that are optimal on certain classes of continuous functions, Ukrain. Mat. Zh. **47** (1995) 1405–1415, Ukrainian J. Math. **47** (1995) 1606–1618

[10] Conway, J.H., Sloane, N.J.A., Sphere packings, lattices and groups, 3rd ed., Springer, New York 1999

[11] Diskant, V.I., Making precise the isoperimetric inequality and stability theorems in the theory of convex bodies, Trudy Mat. Inst. Steklov. **14** (1989) 98–132

[12] Diskant, V.I., Generalizations of a theorem of Lindelöf, Mat. Fiz. Anal. Geom. **4** (1997) 59–64

[13] Duda, R.O., Hart, P.E., Stork, D.G., Pattern classification 2nd ed., J.Wiley, New York 2001

[14] Encyclopedia of mathematics, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1988-1994

[15] Fejes Tóth G., Sum of moments of convex polygons, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **24** (1973) 417–421

[16] Fejes Tóth G., A stability criterion to the moment theorem, Studia Sci. Math. Hungar. **34** (2001) 209–224

[17] Fejes Tóth, L., The isepiphan problem for n-hedra, Amer. J. Math. **70** (1948) 174–180

[18] Fejes Tóth, L., Sur la représentation d'une population infinie par un nombre fini d'elements, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **10** (1959) 299–304

[19] Fejes Tóth, L., Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin 1972

[20] Florian, A., Integrale auf konvexen Mosaiken, Period. Math. Hungar. **6** (1975) 23–38

[21] Gardner, W.R., Rao, B.D., Theoretical analysis of the high-rate vector quantization of LPC parameters, IEEE Trans. Speech Audio Processing **3** (1995) 312–321

[22] Gersho, A., Asymptotically optimal block quantization, IEEE Trans. Inform. Theory **IT-25** (1979) 373–380

[23] Glasauer, S., Gruber, P.M., Asymptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies III, Forum Math. **9** (1997) 383–404

[24] Graf, S., Luschgy, H., Foundations of quantization of probability distributions, Lecture Notes Math. **1730**, Springer, Berlin 2000

[25] Gray, R.M., Neuhoff, D.L., Quantization, IEEE Trans. Inform. Theory **IT-44** (1998) 2325–2383

[26] Gruber, P.M., Volume approximation of convex bodies by circumscribed convex polytopes, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. **4** (1991) 309–317

[27] Gruber, P.M., Aspects of approximation of convex bodies, in: Handbook of convex geometry A, North-Holland, Amsterdam 1993, 319–345

[28] Gruber, P.M., Asymptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies II, Forum Math. **5** (1993) 383–404

[29] Gruber, P.M., Comparisons of best and random approximation of convex bodies by convex polytopes, Rend. Sem. Mat. Univ. Palermo, Ser.II, Suppl. **50** (1997) 189–216

[30] Gruber, P.M., Optimal arrangements of finite point sets in Riemannian 2-manifolds, Trudy Mat. Inst. Steklov. **225** (1999) 148–155, Proc. Steklov Math. Inst. **225** (1999) 160–167

[31] Gruber, P.M., A short analytic proof of Fejes Tóth's theorem on sums of moments, Aequationes Math. **58** (1999) 291–295

[32] Gruber, P.M., Optimal configurations of finite point sets in Riemannian 2-manifolds, Geom. Dedicata **84** (2001) 271–320

[33] Gruber, P.M., Error of asymptotic formulae for volume approximation of convex bodies in $\mathbb{E}^3$, submitted

[34] Gruber, P.M., Error of asymptotic formulae for volume approximation of convex bodies in $\mathbb{E}^d$, Monatsh. Math., in print

[35] Gruber, P.M., Sums of moments and their applications, in preparation

[36] Gruber, P.M., Lekkerkerker, C.G., Geometry of numbers, 2nd ed., North–Holland, Amsterdam 1987

[37] Hlawka, E., The theory of uniform distribution, A B Academic Publ., Berkhamsted 1984

[38] Haimovich, M., Magnanti, T.L., Extremal properties of hexagonal partitioning and the uniform distribution in Euclidean location, SIAM J. Discr. Math. **1** (1988) 50–64

[39] Holmes, R.D., Thompson, A.C., N-dimensional area and content in Minkowski spaces, Pacific J. Math. **85** (1979) 77–110

[40] Imre, M., Kreislagerungen auf Flächen konstanter Krümmung, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **15** (1964) 115–121

[41] Korneichuk, N.P., Best cubature formulas for certain classes of functions of several variables, Mat. Zametki **3** (1968) 565–576

[42] Lindelöf, L., Propriétés générales des poledres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume, Math. Ann. **2** (1870) 150–159

[43] Matérn, B., Persson, O., On the extremum properties of the equilateral triangular lattice and the regular hexagonal network, Förtech. Över. Rapp. Uppsala Stockholm **7** (1965) 15 pp

[44] Newman, D.J., The hexagon theorem, IEEE Trans. Inform. Theory **IT-28** (1982) 137–139

[45] Pagès, G., A space quantization method for numerical integration, J. Comput. Appl. Math. **89** (1997) 1–38

[46] Papadimitriou, C.H., Worst case and probabilistic analysis of a geometric location problem, SIAM J. Comput. **10** (1981) 542–557

[47] Polovinkin, V.I., Asymptotically optimal cubature weight formulas, Sibirskii Mat. Zh. **70** (1989) 151–160, Siber. Math. J. **70** (1989) 289–297

[48] Shannon, C.E., A mathematical theory of communication, Bell Syst. Tech. J. **27** (1948) 379–423, 623–656

[49] Schneider, R., Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory, Univ. Press, Cambridge 1993

[50] Sobol', I.M., Quadrature formulas for functions in several variables that satisfy the general Lipschitz condition, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz. **29** (1989) 935–941, U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. **29** (1989) 201–206

[51] Sobolev, S.L., Introduction to the theory of cubature formulas, Nauka, Moscow 1974,

[52] Thompson, A.C., Minkowski geometry, Univ. Press, Cambridge 1996

[53] Zador, P.L., Topics in the asymptotic quantization of continuous random variables, Bell Lab. Tech. Memo. (1966)

[54] Zador, P.L., Asymptotic quantization error of continuous signals and the quantization dimension, IEEE Trans. Inform. Theory **IT-28** (1982) 139–148