Technische Universität Wien

Bachelorarbeit

Programmextraktion mittels Gödels Dialectica Interpretation

Leopold Fajtak

betreut von
Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Hetzl

18. Mai 2022

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die vorliegende Arbeit wurde im WS2021/22 an der Technischen Universität Wien verfasst und basiert größtenteils auf Kapitel 8 des Buches 'Applied Proof Theory' von Ulrich Kohlenbach [Koh08], sowie dem Artikel [SK07].
Hauptthema ist die Übersetzung von Beweisen in Peano-Arithmetik in intuitionistische Logik, und Anwendung von Gödels Dialectica Interpretation, um Zeugen für existenzquantifizierte Variablen zu erhalten.

Kapitel 2

Schwach extensionale Heyting Arithmetik

Ziel dieses Abschnitts ist es mit der Schwach extensionalen Heyting Arithmetik eine spezielle Form der intuitionistischen Logik zu definieren und einige Eigenschaften zu beweisen, die nützlich für den Soundness Beweis der Dialectica-Interpretation Satz 3.4 sind.

2.1 Sprachen

Definition 2.1. Die Menge aller Typen $\mathbf{T}$ ist induktiv definiert als die kleinste Menge mit

$$0 \in \mathbf{T}$$
$$\rho, \tau \in \mathbf{T} \Rightarrow (\tau \to \rho) \in \mathbf{T}.$$

Die Menge aller puren Typen $\mathbf{P} \subset \mathbf{T}$ ist definiert als die kleinste Menge mit

$$0 \in \mathbf{P}$$
$$\rho \in \mathbf{P} \Rightarrow (0 \to \rho) \in \mathbf{P}.$$

Bemerkung 2.2. Wir führen die folgenden Abkürzungsregeln ein: Seien $\rho_1, \dots \rho_n$ Typen.

- Falls nicht anders angegeben werden ungeklammerte Ketten stets rechtsbündig geklammert: $\rho_1 \to \rho_2 \cdots \to \rho_n$ bedeutet $(\rho_1 \to (\rho_2 \to \dots (\rho_{n-1} \to \rho_n) \dots))$.
- Statt $\rho_1 \to \rho_2 \cdots \to \rho_n$ schreiben wir manchmal auch $(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}) \to \rho_n$.
- Der String $\rho_1 \to \rho_2 \cdots \to \rho_n$ kann auch durch $\bar{\rho}^t$ ersetzt werden. Dies ist für sich alleine kein Typ, $\bar{\rho}^t \to \tau = (\rho_1, \dots, \rho_{n-1}) \to \rho_n$, jedoch schon.

Definition 2.3. Sei $T \subseteq \mathbf{T}$ eine Menge von Typen, C eine Menge an Konstantensymbolen, P eine höchstens abzählbare Menge an Prädikatensymbolen, $t \cup P : C \to T$, $t : P \to T^*$ die Abbildungen die jedem Konstantensymbol seinen Typen, bzw. jedem Prädikatensymbol sein Typentupel zuordnen , und $Q \subseteq T$. Wir definieren die Sprache $\mathscr{L}(T, C, Q, t)$ (mit $t : C \cup P \to T \cup T^*$, $t|_C = t_C$ und $t|_P = t_P$) wie folgt:

Terme

1. Für alle $c \in C$ ist $c^{t(c)}$ ein Term vom Typ $t(c)$.

2. Für alle Variablensymbole x und Typen $\rho \in T$ ist x^ρ ein Term vom Typ ρ.
3. Ist t ein Term vom Typ ρ, und f ein Term vom Typ $(\rho \to \tau)$, so ist $f(t)$ ein Term vom Typ τ.

Wir bezeichnen weiters mit $\mathrm{FV}(t)$ die Menge der freien Variablen im Term t. Ist $\mathrm{FV}(t) = \emptyset$, so heißt t *geschlossen*. Wir führen die folgende Abkürzungsregel ein:

- Sind $t_1, \dots, t_n$ Terme von Typen $\rho_1, \dots \rho_n$, und ist f vom Typ $(\rho_1, \dots, \rho_n) \to \tau$, so schreiben wir statt $f(t_1) \dots (t_n)$ auch $f(t_1, \dots, t_n)$, bzw. $f(\bar{t})$.

Formeln

1. $\bot$ ist eine (Atom-)Formel
2. Sind $t_1, \dots, t_n$ Terme von Typen $\rho_1, \dots, \rho_n$ und ist R ein Prädikatensymbol mit Typententupel $t(R) = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, so ist $R(t_1, \dots, t_n)$ eine (Atom-)Formel.
3. Sind A, B Formeln, so sind auch $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ und $(A \supset B)$ Formeln.
4. Ist A eine Formel, x eine Variable, und $\rho \in Q$, so sind $(\forall x^\rho A)$ und $(\exists x^\rho A)$ Formeln.

Wir führen die folgenden Abkürzungsregeln ein:

- $\neg A$ beschreibt $A \supset \bot$
- $A \equiv B$ beschreibt $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$
- Bei weggelassenen Klammern binden Negation und Quantoren stärker als $\vee$, $\wedge$, und $\vee$, $\wedge$ binden stärker als $\supset$, $\equiv$.
- Sind die Typen (bzw. ihre Beziehung) von Variablen- und Konstantensymbolen aus dem Zusammenhang erkennbar, so können sie weggelassen werden.

Weiters gilt in der gesamten Arbeit die Konvention, dass jede Variable in allen Vorkommnissen einer Formel, stets denselben Typ hat. Dadurch muss der Typ einer Variable in einer Formel stets nur einmal deklariert werden. Beispiel: In

$$f(y^0, y) =_0 z$$

hat f Typ $(0,0) \to 0$, und z Typ 0.

Definition 2.4. Im weiteren Text sei

- $\mathscr{L}_{\mathrm{HA}} := \mathscr{L}(\mathbf{P}, \{0^0, S^{0\to 0}\} \cup \{f^{0\to 0} \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ primitiv rekursiv}\}, \{0\}, \{=_0\})$ mit $=_0$ wie oben, die Sprache der *Heyting-Arithmetik*.
- $\mathscr{L}_{\text{E-HA}^\omega} := \mathscr{L}(\mathbf{T}, \{0^0, S^{0\to 0}\} \cup C, \mathbf{T}, \{=_0\})$ mit $=_0$ wie oben, und

$$\begin{aligned} C := &\left\{\Pi_{\rho,\tau}^{\rho\to\tau\to\rho}, \Sigma_{\delta,\rho,\tau}^{(((\delta,\rho)\to\tau),(\rho\to\delta),\delta)\to\tau} \mid \delta, \rho, \tau \in \mathbf{T}\right\} \\ &\cup \left\{(R_i)_{\bar{\rho}^t}^{(0,\bar{\rho}^t,((\bar{\rho}^t,0)\to\rho_1)\dots((\bar{\rho}^t,0),\rho_k))\to\rho_i} \mid k \in \mathbb{N}, i \in \{1,\dots,k\}, \rho_1, \dots, \rho_k \in \mathbf{T}, \bar{\rho}^t = \rho_1 \to \dots \to \rho_k\right\}\end{aligned}$$

  die Sprache der *extensionalen Heyting Arithmetik*. Es heißen die Symbole $\Pi_{\rho,\tau}$ *Projektoren*, $\Sigma_{\delta,\rho,\tau}$ *Kombinatoren*, und $\bar{R}_{\bar{\rho}^t} = \left\{(R_1)_{\bar{\rho}^t}, \dots, (R_k)_{\bar{\rho}^t}\right\}$ (simultane) *Rekursoren*.

Bemerkung 2.5 (Tupel von Funktionen). Sind $f_1^{\bar{\rho}\to\tau_1}, \dots, f_n^{\bar{\rho}\to\tau_n}$, sowie $\bar{x}^{\bar{\rho}}$ und $g^{(\tau_1,\dots,\tau_n)\to\delta}$ Konstantensymbole oder Variablen, so bezeichnet

$$g(\bar{f}(\bar{x}))$$

den Term

$$g(f_1(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x}))$$

2.2 Ableitungsregeln

Bemerkung 2.6. Wir führen die folgenden Abkürzungsregeln ein:

- Sind $\bar{x}$ alle freien Variablen in A, und $\bar{t}$ ein Tupel von Termen passender Typen, so steht $A(\bar{t})$ für $A[\bar{t}/\bar{x}]$
- Das Gleichheitssymbol für höhere Typen: $s =_\rho t$ mit s, t vom Typ $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k) \to 0$ steht für

$$\forall y_1^{\rho_1}, \dots, y_k^{\rho_k} (s(\bar{y}) =_0 t(\bar{y}))$$

  Ist klar, dass s oder t vom Typ ρ ist, so kann auch $s = t$ statt $s =_\rho t$ geschrieben werden.

- Der Rekursor vom Typ null R_0 ist definiert als $(R_1)_0^{(0,0,((0,0)\to 0))\to 0}$

Definition 2.7. Die Axiome und Ableitungsregeln der Schwach Extensionalen Heyting-Arithmetik (unter Verwendung der Sprache $\mathscr{L}_{\text{E-HA}^\omega}$) sind folgendermaßen gegeben:

Axiome von HA:

(H1) $A \vee A \supset A, A \supset A \wedge A$ (Kontraktionsaxiome)

(H2) $A \supset A \vee B, A \wedge B \supset A$ (Abschwächungsaxiome)

(H3) $A \vee B \supset B \vee A, A \wedge B \supset B \wedge A$ (Permutationsaxiome)

(H4) $\perp \supset A$ (ex falso quodlibet)

(H5) $\forall x A \supset A[t/x]$, wobei t frei für x in A, und $A[t/x]$ durch Ersetzen jedes Vorkommnisses von x in A durch t entsteht.

(H6) $A[t/x] \supset \exists x A$ mit den gleichen Bedingungen wie in (H5).

Regeln von WE-HA$^\omega$

1. Regeln der intuitionistischen Logik

   (a) Modus Ponens und Syllogismus:

$$\frac{A \quad A \supset B}{B}\ (\text{MP}) \qquad\qquad \frac{A \supset B \quad B \supset C}{A \supset C}\ (\text{S})$$

   (b) Exportation und Importation:

$$\frac{A \wedge B \supset C}{A \supset (B \supset C)}\ (\text{E}) \qquad\qquad \frac{A \supset (B \supset C)}{A \wedge B \supset C}\ (\text{I})$$

   (c) Expansion:

$$\frac{A \supset B}{C \vee A \supset C \vee B}\ (\text{Exp})$$

   (d) Quantorenregeln:

$$\frac{B \supset A}{B \supset \forall x A}\ (\text{I}\forall) \qquad\qquad \frac{A \supset B}{\exists x A \supset B}\ (\text{I}\exists)$$, wobei x nicht frei in B ist.

2. Gleichheitsaxiome

   (a) $x =_0 x$

   (b) $x = y \supset y = x$

   (c) $x = y \wedge y = z \supset x = z$.

3. Regeln der Schwach Existensionalen Heyting Arithmetik

   (a) Schwache (quantorenfreie) Existensionalitätsaxiome:

$$\frac{A_0 \supset s =_\rho t}{A_0 \supset r[s/x^\rho] =_\tau r[t/x^\rho]}$$

   für quantorenfreie Formeln A_0, und s^ρ, t^ρ, r^τ Terme von $\mathscr{L}_{\text{E-HA}^\omega}$.

   (b) Extensionalitätsregeln höherer Typen:

$$E_\rho : \forall z^\rho, x_1^{\rho_1}, y_1^{\rho_1}, \ldots, x_k^{\rho_k}, y_k^{\rho_k} \left(\bigwedge_{i=1}^{k} (x_i =_{\rho_i} y_i) \supset z(\bar{x}) =_0 z(\bar{y}) \right)$$

   mit $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_k) \to 0$

   (c) Nachfolgeraxiome: $S(x) \neq 0, S(x) =_0 S(y) \supset x =_0 y$;

   (d) Induktionsschema:

$$\text{IA} : A(0) \wedge \forall x^0 (A(x) \supset A(S(x))) \supset \forall x^0 A(x)$$

   für jede Formel $A(x^0) \in \mathscr{L}_{\text{HA}}$

   (e) Axiome für $\Pi_{\rho,\tau}, \Sigma_{\delta,\rho,\tau}$, und $\bar{R}_{\bar{\rho}}$:

$$(\Pi) : \Pi_{\rho,\tau}(x, y) =_\rho x$$
$$(\Sigma) : \Sigma_{\delta,\rho,\tau}(x, y, z) =_\tau x(z, y(z))$$
$$(\bar{R}) : \begin{cases} (R_i)_{\bar{\rho}^t}(0, \bar{y}, \bar{z}) =_{\rho_i} y_i \\ (R_i)_{\bar{\rho}^t}(S(x^0), \bar{y}, \bar{z}) =_{\rho_i} z_i(\bar{R}_{\bar{\rho}^t}(x, \bar{y}, \bar{z}), x) \text{ für } i = 1, \ldots, k \end{cases}$$

   mit $\bar{\rho}^t = \rho_1 \to \ldots \to \rho_k, \bar{y} = y_1^{\rho_1}, \ldots, y_k^{\rho_k}, \bar{z} = z_1^{(\bar{\rho}^t, 0) \to \rho_1}, \ldots, z_k^{(\bar{\rho}^t, 0) \to \rho_k}$

Bemerkung 2.8. Es ist, zumindest auf dem ersten Blick nicht klar, wie aus $\neg\forall x A$ die Formel $\exists x \neg A$ geschlossen werden kann. Tatsächlich ist dies im Allgemeinen nicht möglich. Intuitiv lässt sich eine existenzquantifizierte Formel $\exists x B(x)$ nur beweisen, wenn bereits ein Term t konstruiert wurde, sodass $B(t)$ wahr ist. Diese Eigenschaft erlaubt es mit Gödels Dialectica Interpretation Zeugen für Existenzquantoren zu extrahieren.

2.3 Bemerkungen zur Induktion

2.3.1 Ein Deduktionstheorem

Das vorgestellte System an Axiomen und Regeln wurde von Gödel zum Beweis des von Satz 3.4 vorgeschlagen. Darin direkt Beweise zu führen ist allerdings eher unintuitiv. Um das zu vereinfachen hilft das folgende abgeschwächte Deduktionstheorem für WE-HA$^\omega$.
(Vgl. [Tro73, 1.1.5, Satz 1.1.10])

Satz 2.9 (Abgeschwächtes Deduktionstheorem für WE-HA$^\omega$). *Es bezeichne* $\vdash_H$ *die Beweisbarkeit in* WE-HA$^\omega$ *ohne Verwendung der Extensionalitätsaxiome. Es gilt*

$$\Gamma, A \vdash_H B \Rightarrow \Gamma \vdash_H A \supset B$$

Bemerkung 2.10. Schwach extensionale Heyting-Arithmetik erfüllt das Deduktionstheorem *nicht* - vgl. [Koh08, Theorem 9.11].

Um den Satz zu beweisen werden einige Aussagen aus dem folgenden Lemma benötigt.

Lemma 2.11. *Es gelten in* WE-HA$^\omega$ *die folgenden Regeln*

(a) $\vdash_H A \supset A$
(b) $\vdash_H A \wedge B \supset B, B \supset A \vee B$
(c) $A \supset C, B \supset C \vdash_H A \vee B \supset C$
(d) $A \supset B, A \supset C \vdash_H A \supset B \wedge C$
(e) $B \vdash_H A \supset B$
(f) $A, B \vdash_H A \wedge B$
(g) $A \supset B, A \supset (B \supset C) \vdash_H A \supset C$
(h) $\vdash_H (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
(i) $\vdash_H ((A \supset B) \supset (A \supset C)) \supset (A \supset (B \supset C))$
(j) $A \supset B, A \supset C \vdash_H A \supset (B \wedge C)$
(k) $A \supset (B \supset C), A \supset (C \supset D) \vdash_H A \supset (B \supset D)$
(l) $A \supset (B \supset C) \vdash_H B \supset (A \supset C)$
(m) $\vdash_H (A \supset C) \wedge (B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)$
(n) $\vdash_H B \supset ((A \supset C) \supset (A \supset (B \wedge C)))$
(o) $A \supset (B \wedge (C \supset D)) \vdash_H A \supset (B \supset (C \supset D))$
(p) $A \supset (B \supset (C \supset D)) \vdash_H A \supset (B \wedge (C \supset D))$
(q) $A \supset (B \supset C) \vdash_H A \supset ((D \vee B) \supset (D \vee C))$

Beweis. (a) $\dfrac{A \supset A \wedge A \quad A \wedge A \supset A}{A \supset A}$

(b) $\dfrac{\mathrm{(H3)}\, A \wedge B \supset B \wedge A \quad \mathrm{(H2)}\, B \wedge A \supset B}{A \wedge B \supset B}\,\mathrm{(S)}$, und $\dfrac{\mathrm{(H2)}\, B \supset B \vee A \quad \mathrm{(H3)}\, B \vee A \supset A \vee B}{B \supset A \vee B}\,\mathrm{(S)}$.

(c)

$$\dfrac{\dfrac{B \supset C}{A \vee B \supset A \vee C}\,\mathrm{(Exp)} \quad \dfrac{\mathrm{(H3)}\, A \vee C \supset C \vee A \quad \dfrac{\dfrac{A \supset C}{C \vee A \supset C \vee C}\,\mathrm{(Exp)} \quad \mathrm{(H1)}\, C \vee C \supset C}{C \vee A \supset C}\,\mathrm{(S)}}{A \vee C \supset C}\,\mathrm{(S)}}{A \vee B \supset C}\,\mathrm{(S)}$$

(d)

$$\dfrac{\mathrm{(H1)}\, A \supset A \wedge A \quad \dfrac{\dfrac{A \supset C \quad \dfrac{\dfrac{\mathrm{(H3)}\, C \wedge A \supset A \wedge C \quad \dfrac{\dfrac{A \supset B \quad \dfrac{\mathrm{(a)}\, B \wedge C \supset B \wedge C}{B \supset (C \supset B \wedge C)}\,\mathrm{(E)}}{A \supset (C \supset B \wedge C)}\,\mathrm{(S)}}{A \wedge C \supset B \wedge C}\,\mathrm{(I)}}{C \wedge A \supset B \wedge C}\,\mathrm{(S)}}{C \supset (A \supset B \wedge C)}\,\mathrm{(E)}}{A \supset (A \supset B \wedge C)}\,\mathrm{(S)}}{A \wedge A \supset B \wedge C}\,\mathrm{(I)}}{A \supset B \wedge C}\,\mathrm{(S)}$$

(e) Wir haben von (H2) $B \wedge A \supset B$. Mit Exportation folgt $B \supset (A \supset B)$, und mit Modus Ponens die gewünschte Regel.

(f)

$$\dfrac{\top \qquad \dfrac{\dfrac{A}{\top \supset A}\,\text{(e)} \qquad \dfrac{B}{\top \supset B}\,\text{(e)}}{\top \supset A \wedge B}\,\text{(d)}}{A \wedge B}\,\text{(MP)}$$

(g)

$$\dfrac{\dfrac{\text{(a)}\, A \supset A \qquad A \supset B}{A \supset A \wedge B}\,\text{(d)} \qquad \dfrac{A \supset (B \supset C)}{A \wedge B \supset C}\,\text{(I)}}{A \supset C}\,\text{(S)}$$

(h) Wir schreiben $\bar{B} = (A \supset (B \supset C)) \wedge (A \supset B)$ und $\bar{A} = (\bar{B} \wedge A)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{(b)}\, \bar{A} \supset A \qquad \dfrac{\text{(H2)}\, \bar{A} \supset \bar{B} \qquad \text{(b)}\, \bar{B} \supset (A \supset B)}{\bar{A} \supset (A \supset B)}\,\text{(S)}}{\bar{A} \supset B}\,\text{(g)} \qquad \dfrac{\text{(b)}\, \bar{A} \supset A \qquad \text{(H2),(H2),(S)}\, \bar{A} \supset (A \supset (B \supset C))}{\bar{A} \supset (B \supset C)}\,\text{(g)}}{\bar{A} \supset C}\,\text{(g)}}{\bar{B} \supset (A \supset C)}\,\text{(E)}}{(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))}\,\text{(E)}$$

(i) Mit $D = (A \supset B) \supset (A \supset C)$ und $E = (D \wedge A) \wedge B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{(H2), (b),(S)}\, E \supset A \qquad \dfrac{\text{(H2),(H2),(S)}\, E \supset D \qquad \text{(b)}\, D \supset (A \supset C)}{E \supset (A \supset C)}\,\text{(S)}}{E \supset C}\,\text{(g)}}{D \wedge A \supset (B \supset C)}\,\text{(E)}}{D \supset (A \supset (B \supset C))}\,\text{(E)}$$

(j)

$$\dfrac{\dfrac{A \supset B \qquad A \supset C}{(A \supset B) \wedge (A \supset C)}\,\text{(f)} \qquad \text{(i)}\, ((A \supset B) \wedge (A \supset C)) \supset (A \supset B \wedge C)}{A \supset B \wedge C}\,\text{(MP)}$$

(k)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \supset (B \supset C)}{(A \supset B) \supset (A \supset C)}\,\text{(h), (MP)} \qquad \dfrac{A \supset (C \supset D)}{(A \supset C) \supset (A \supset D)}\,\text{(h), (MP)}}{(A \supset B) \supset (A \supset D)}}{A \supset (B \supset D)}\,\text{(i), (MP)}$$

(l)

$$\dfrac{\dfrac{\text{(H3)}\, B \wedge A \supset A \wedge B \qquad \dfrac{A \supset (B \supset C)}{A \wedge B \supset C}\,\text{(I)}}{B \wedge A \supset C}\,\text{(S)}}{B \supset (A \supset C)}\,\text{(E)}$$

(m) Mit $D = (A \supset C) \wedge (B \supset C), E = A \vee B \supset C$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{(H2)}\, D \supset (A \supset C)}{A \supset (D \supset C)}\,\text{(l)} \quad \dfrac{\text{(b)}\, D \supset (B \supset C)}{B \supset (D \supset C)}\,\text{(I)}}{A \vee B \supset (D \supset C)}\,\text{(c)}}{D \supset E}\,\text{(l)}$$

(n) Mit $D = B \wedge (A \supset C)$ und $E = D \wedge A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{(b)}\, E \supset A \quad \text{(H2),(H2),(S)}\, E \supset (A \supset B)}{E \supset B}\,\text{(g)} \quad \dfrac{\text{(b)}\, E \supset A \quad \text{(H2),(b),(S)}\, E \supset (A \supset C)}{E \supset C}\,\text{(g)}}{E \supset B \wedge C}\,\text{(d)}}{D \supset (A \supset B \wedge C)}\,\text{(E)}}{B \supset ((A \supset C) \supset (A \supset B \wedge C))}\,\text{(E)}$$

(o) Wir zeigen zuerst $(A \wedge B) \wedge C \supset A \wedge (B \wedge C)$. Mit $\bar{A} = (A \wedge B) \wedge C$ und $\bar{B} = (B \wedge C)$ ist

$$\dfrac{\text{(H2),(H2),(S)}\, \bar{A} \supset A \quad \dfrac{\text{(H2),(b),(S)}\, \bar{A} \supset B \quad \text{(b)}\, \bar{A} \supset C}{\bar{A} \supset \bar{B}}\,\text{(j)}}{\bar{A} \supset A \wedge \bar{B}}\,\text{(j)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(A \wedge B) \wedge C \supset A \wedge (B \wedge C) \quad \dfrac{A \supset (B \wedge C \supset D)}{A \wedge (B \wedge C) \supset D}\,\text{(I)}}{(A \wedge B) \wedge C \supset D}\,\text{(S)}}{A \wedge B \supset (C \supset D)}\,\text{(E)}}{A \supset (B \supset (C \supset D))}\,\text{(E)}$$

(p) Wie (o): Wir zeigen zuerst $A \wedge (B \wedge C) \supset (A \wedge B) \wedge C$ mit $\bar{A} = A \wedge (B \wedge C)$:

$$\dfrac{\dfrac{\text{(H2)}\, \bar{A} \supset A \quad \text{(b),(H2),(S)}\, \bar{A} \supset B}{\bar{A} \supset (A \wedge B)}\,\text{(j)} \quad \text{(b),(b),(S)}\, \bar{A} \supset C}{\bar{A} \supset (A \wedge B) \wedge C}\,\text{(j)}$$

und führen den Beweis aus (o) in die andere Richtung

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \wedge C) \supset (A \wedge B) \wedge C \quad \dfrac{\dfrac{A \supset (B \supset (C \supset D))}{A \wedge B \supset (C \supset D)}\,\text{(I)}}{(A \wedge B) \wedge C \supset D}\,\text{(I)}}{A \wedge (B \wedge C) \supset D}\,\text{(S)}}{A \supset (B \wedge C \supset D)}\,\text{(E)} \quad .$$

(q) Mit $E = (D \vee C), F = (B \supset E), G = (D \supset E)$, und $H = (B \supset C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{(H2)}\, G}{A \supset G}\,\text{(e)} \quad \dfrac{A \supset H \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{(a)}\, H \supset H}{H \wedge B \supset C}\,\text{(I)} \quad \text{(b)}\, C \supset E}{H \wedge B \supset E}\,\text{(S)}}{H \supset F}\,\text{(E)}}{A \supset F}\,\text{(S)}}{A \supset (G \wedge F)}\,\text{(d)} \quad \text{(m)}\, G \wedge F \supset (D \vee B \supset E)}{A \supset (D \vee B \supset E)}\,\text{(S)}$$

□

Beweis. (Deduktionstheorem). Wir zeigen mit Induktion über die Länge des Beweises, dass ein Beweis von B aus $\Gamma \cup \{A\}$ zu einem Beweis von $A \supset B$ aus Γ umgewandelt werden kann.
Basis Hat der Beweis Länge 1, so ist entweder $B \in \Gamma$, oder $B \equiv A$, oder B ist ein Axiom.

1. Ist $B \in \Gamma$, so gilt $\Gamma \vdash_H B$, daher, mit 2.11.(e) $\Gamma \vdash_H A \supset B$.
2. Ist $B \equiv A$, so folgt aus (H2) $B \supset A$, und mit Modus Ponens A. Mit 2.11.(a) folgt $B \supset A$.
3. Es gilt ebenfalls mit 2.11.(a) $\vdash_H B \supset B$.

Induktionsschritt Es sei ein Beweis mit $A_1, \dots, A_k, B$ Länge $k+1$ gegeben, und nach Induktionsannahme gelte für alle $i \in \{1, \dots, k\}$, dass $\Gamma, A \vdash_H A \supset A_i$. Wir machen eine Fallunterscheidung anhand der angewandten Regel zur Deduktion von B. Ist B ein Axiom, so gelten die gleichen Argumente wie in der Induktionsbasis. Wurde eine Regel angewandt, unterscheiden wir die folgenden Fälle:
Modus Ponens: Wurde $\dfrac{A_i \quad A_i \supset B}{B}$ verwendet, gilt nach Induktionshypothese

$$\Gamma \vdash_H A \supset A_i \qquad \text{und} \qquad \Gamma \vdash_H A \supset (A_i \supset B)$$

woraus mit Lemma 2.11.(h) $\Gamma \vdash_H (A_i \supset B) \supset (A \supset B)$ folgt, also mit nochmaliger Anwendung von MP $\Gamma \vdash_H A \supset B$.
Syllogismus Es seien $A_i = (C \supset D)$, $A_j = (D \supset E)$, und $B = (C \supset E)$. Wir haben nach IH $\Gamma \vdash_H (A \supset (C \supset D))$ und $\Gamma \vdash_H (A \supset (D \supset E)$. Mit Lemma 2.11.(k) folgt $\Gamma \vdash_H A \supset (C \supset E)$.
Exportation und Importation Mit Lemma 2.11.(o), bzw. Lemma 2.11.(p).
Expansion Mit Lemma 2.11.(q).
Quantorenregeln Angenommen $\Gamma \vdash_H A \supset (C \supset B)$, wobei Γ und A beide x nicht frei enthalten. Wir erhalten

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \supset (C \supset B)}{A \wedge C \supset B}\,(\mathrm{I})}{A \wedge C \supset \forall x B}\,(\mathrm{I}\forall)}{A \supset (C \supset \forall x B)}\,(\mathrm{E})$$

Für die Existenzquantoreneinführung gelte $\Gamma \vdash_H A \supset (B \supset C)$. Mit zweimaliger Anwendung von Lemma 2.11.(l) erhalten wir

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \supset (B \supset C)}{B \supset (A \supset C)}}{\exists x B \supset (A \supset C)}\,(\mathrm{I}\exists)}{A \supset (\exists x B \supset C)} \quad .$$

□

Das folgende Resultat erweist sich im Beweis von Satz 3.4 als äußerst praktisch:

Korollar 2.12. *Man kann im der Definition von* WE-HA$^\omega$ *das Induktionsschema durch die Induktionsregel*

$$\frac{A(0) \wedge \forall x^0 (A(x) \supset A(S(x)))}{\forall x^0 A(x)}\ (\mathrm{IR})$$

ersetzen.

Beweis. Die Indktionsregel folgt aus dem Induktionsschema mit Modus Ponens. In die andere Richtung gilt mit $B = \forall x(A(x) \supset A(S(x))$ und $C(x) = (A(0) \wedge B) \supset A(x)$

$$\dfrac{\dfrac{C(0) \quad C(x) \supset C(S(x))}{C(x)}\,(\mathrm{IR})}{(A(0) \wedge B) \supset \forall x A(x)}\,(\mathrm{I}\forall)$$

Die Formel $C(0)$ folgt aus (H2). Es bleibt zu zeigen, dass $\vdash C(x) \supset C(S(x))$. Es gilt

$$\dfrac{\dfrac{A(0) \wedge B \quad C(x)}{A(x)}\,(\mathrm{MP}) \quad \dfrac{(\mathrm{H5}) B \supset (A(x) \supset A(S(x))) \quad B}{A(x) \supset A(S(x))}\,(\mathrm{MP})}{A(S(x))}\,(\mathrm{MP}),$$

also $C(x), (A(0) \wedge B) \vdash_H A(S(x))$. Mit zweimaliger Anwendung des Deduktionstheorems Satz 2.9 folgt $\vdash_H C(x) \supset C(S(x))$.

□

Die Projektoren und Rekursoren von WE-HA$^\omega$ ermöglichen mit der Lambda Abstraktion eine wesentlich intuitivere Art (funktionale) Terme zu definieren.

2.3.2 Lambda Abstraktion und Primitiv Rekursive Funktionen

Definition 2.13 (Lambda Abstraktion). Für jeden Term $t[x^\rho]^\tau = t'(s)$ in $\mathscr{L}_{\text{E-HA}^\omega}$ sei

$$\begin{aligned} \lambda x.x &:= \Sigma(\Pi_{\rho,0\to\rho}, \Pi_{\rho,0}) \\ \lambda x.t &:= \Pi_{\rho,0}(t), \text{ falls } x \notin \mathrm{FV}(t), \\ \lambda x.t'(s) &:= \Sigma((\lambda x.t'), (\lambda x.s)), \text{ falls } x \in \mathrm{FV}(t'(s)). \end{aligned}$$

Lemma 2.14. *Sei $t[x^\rho]^\tau$ ein Term in $\mathscr{L}_{\text{E-HA}^\omega}$. Der Term $\lambda x^\rho.t[x]$ hat Typ $\rho \to \tau$ mit* $\mathrm{FV}(\lambda x^\rho.t[x]) = \mathrm{FV}(t[x]) \setminus \{x\}$ *und*

$$\text{WE-HA}^\omega \vdash (\lambda x^\rho.t[x])(s^\rho) =_\tau t[s/x]$$

Beweis. Da

$$(\lambda x^\rho.x)(s^\rho) = \Sigma(\Pi_{\rho,0\to\rho}, \Pi_{\rho,0}, s^\rho)$$

gilt

$$\begin{aligned} \text{WE-HA}^\omega \vdash (\lambda x^\rho.x)(s^\rho) &=_\rho \Pi_{\rho,0\to\rho}(s^\rho, \Pi_{\rho,0}, s^\rho) \\ &=_\rho s^\rho. \end{aligned}$$

Genauso gilt, falls $x \notin \mathrm{FV}(t)$, dass $t = t[s/x]$ und

$$\text{WE-HA}^\omega \vdash (\lambda x^\rho.t)(s^\rho) =_\rho t.$$

Ist $x \in \mathrm{FV}(t)$, $t = t'(r)$, so ist

$$(\lambda x.t'(r)) = \Sigma((\lambda x.t'), (\lambda x.r))$$

daher

$$\begin{aligned}\text{WE-HA}^{\omega} \vdash (\lambda x^{\tau}.t'(r))(s^{\rho}) &=_{\tau} (\lambda x.t')(s, (\lambda x.r)(s)) \\ &=_{\tau} (\lambda x.t')(s, r[x/s]) \\ &=_{\tau} t'[x/s](r[x/s]))\end{aligned}$$

und

$$t'[x/s](r[x/s]) = t[x/s]$$

.

$\square$

Bemerkung 2.15. Statt $\lambda x_1 \dots \lambda x_n.t$ schreiben wir oft $\lambda x_1 \dots x_n$. Die äußeren Klammern um $(\lambda x.t[x])$ können weggelassen werden, falls die Klammerung aus dem Zusammenhang ersichtlich ist.
Weiters verwenden wir gelegentlich $\mathcal{O}$ als Platzhalter für einen beliebigen Term passenden Typs. Beispielsweise ließe sich $\mathcal{O}^0 := 0$ und $\mathcal{O}^{\tau \to \rho} := \lambda x^{\tau}.\mathcal{O}^{\rho}$ definieren.

Bemerkung 2.16. Mit Hilfe von R_0 und Lambda Abstraktion lassen sich alle primitiv rekursiven Funktionen in WE-HA$^{\omega}$ konstruieren.

Definition 2.17. Die Funktionen $+, \cdot, \mathrm{sg}, \mathrm{pd}, \dot{-}, |\cdot - \cdot|$ seien primitiv rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} x + 0 &= x, & x + S(y) &= S(x + y) \\ x \cdot 0 &= 0, & x \cdot S(y) &= x \cdot y + x \\ \mathrm{sg}(0) &= 1, & \mathrm{sg}(S(y)) &= 0 \\ \mathrm{pd}(0) &= 0, & \mathrm{pd}(S(x)) &= x \\ x \dot{-} 0 &= x, & x \dot{-} S(y) &= \mathrm{pd}(x \dot{-} y) \\ |x - y| &= (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x) \end{aligned}$$

Proposition 2.18. *Die Formeln*

(a) $S(x) \dot{-} S(y) = x \dot{-} y$
(b) $S(x) \dot{-} x = S(0)$
(c) $x \dot{-} x = 0$
(d) $x = 0 \lor x = S(\mathrm{pd}(x))$
(e) $x \neq 0 \equiv x = S(\mathrm{pd}(x)), x = S(z) \supset x = S(\mathrm{pd}(x))$
(f) $\mathrm{sg}(x) = 0 \equiv x \neq 0$

sind in WE-HA$^{\omega}$ *ableitbar.*

Beweis. (a) $S(x) \dot{-} S(0) = \mathrm{pd}(S(x) \dot{-} 0) = \mathrm{pd}(S(x)) = x = x \dot{-} 0$. Angenommen $S(x) \dot{-} S(y) = x \dot{-} y$. Dann ist $S(x) \dot{-} S(S(y)) = \mathrm{pd}(S(x) \dot{-} S(y)) = \mathrm{pd}(x \dot{-} y) = x \dot{-} S(y)$. Mit Induktion folgt $S(x) \dot{-} S(y) = x \dot{-} y$.

(b) $S(0) \dot{-} 0 = S(0)$, $S(S(x)) \dot{-} S(x) = S(x) \dot{-} x = S(0)$ (mit (a) und Induktionshypothese). Also gilt mit Induktion $S(x) \dot{-} x = S(0)$.

(c) $x \dot{-} x = S(x) \dot{-} S(x) = \mathrm{pd}(S(x) \dot{-} x) = \mathrm{pd}(S(0)) = 0$ (mit (a), (b))

(d) Mit Induktion. Der Fall $x = 0$ ist klar. Für $S(x)$ ist $S(\mathrm{pd}(S(x))) = S(x)$, und die Formel ist wahr für $S(x)$.

(e) Aus dem Nachfolgeraxiom $S(x) \neq 0$ folgt direkt $x = S(\mathrm{pd}(x)) \supset x \neq 0$ die anderen Implikationen folgen aus (d) und $S(\mathrm{pd}(S(x))) = S(x)$.

(f) Wie vorhin mit (d).

$\square$

2.3.3 Doppelte Induktion

In WE-HA$^\omega$ ist auch die folgende doppelte Induktionsregel beweisbar
Vgl. [TD88]

Proposition 2.19 (doppelte Induktion). *In* WE-HA$^\omega$ *gilt* $A(x, 0), A(0, y), A(x, y) \supset A(S(x), S(y)) \vdash A(t_0, t_1)$

Proposition 2.20. *Für alle Terme* $t^{(0,0)\to 0}, t_0^0, t_1^0$ *gilt in* WE-HA$^\omega$ *die Regel*

$$A(0, y), A(x, t(x, y)) \supset A(S(x), y) \vdash A(t_0, t_1).$$

Beweis. Angenommen, es gilt $A(0, y)$ und $A(x, t(x, y)) \supset A(S(x), y)$. Definiere eine Rekursion ψ vermöge

$$\psi(0) = t_1, \psi(S(z)) = t(t_0 \dot{-} S(z), \psi(z)).$$

Ist $t_0 \dot{-} S(z) = S(x)$, so ist $t_0 \dot{-} S(z) = \mathrm{pd}(t_0 \dot{-} S(z)) = \mathrm{pd}(S(x)) = x$, also

$$S(x) = t_0 \dot{-} S(z) \supset \big(A(t_0 \dot{-} S(z), \psi(S(z))) \supset A(t_0 \dot{-} z, \psi(z))\big).$$

Da außerdem $A(0, \psi(z))$ gilt,

$$0 = t_0 \dot{-} z \supset \big(A(t_0 \dot{-} S(z), \psi(S(z))) \supset A(t_0 \dot{-} z, \psi(z))\big)$$

und daher mit der speziellen Induktionsregel $A(0), A(x) \supset A(S(x)) \vdash A(t)$

$$t_0 - z = t_0 - z \supset \big(A(t_0 \dot{-} S(z), \psi(S(z)) \supset A(t_0 \dot{-} z\psi(z))\big)$$

und mit dem Axiom $t_0 - z =_0 t_0 - z$

$$A(t_0 \dot{-} S(z), \psi(S(z)) \supset A(t_0 \dot{-} z\psi(z))$$

Aus dem Deduktionstheorem Satz 2.9 folgt leicht $B \supset C \vdash (C \supset D) \supset (B \supset D)$, und damit

$$\big(A(t_0 \dot{-} z, \psi(z)) \supset A(t_0, t_1)\big) \supset \big(A(t_0 \dot{-} S(z), \psi(S(z))) \supset A(t_0, t_1)\big)$$

Außerdem gilt nach Definition von ψ

$$A(t_0 \dot{-} 0, \psi(0) \supset A(t_0, t_1)$$

und nach Induktion

$$A(t_0 \dot{-} t_0, \psi(t_0)) \supset A(t_0, t_1)$$

und mit der Annahme $A(0, y)$ gilt

$$A(t_0, t_1).$$

$\square$

Beweis (doppelte Induktion). Angenommen $\vdash A(x, 0), A(0, y), A(x, y) \supset A(S(x), S(y))$. Nach 2.18.(e) gilt $y = S(z) \supset S(\mathrm{pd}(y)) = y$, und daher

$$y = S(z) \supset (A(x, \mathrm{pd}(y)) \supset A(S(x), y)) \qquad \text{und auch}$$

$$y = 0 \supset (A(x, \mathrm{pd}(y)) \supset A(S(x), y)), \qquad \text{da } A(S(x), 0) \text{ eine Annahme ist}$$

Da wir aus der Induktionsregel auch $A(0), A(S(x)) \vdash A(t)$ ableiten können gilt

$$y = y \supset (A(x, \mathrm{pd}(y)) \supset A(S(x), y))$$

Mit dem Axiom $y = y$ und Proposition 2.20 folgt die gewünschte Aussage. $\square$

2.4 Termumwandlungen

Eine im Beweis von Satz 3.4 oft verwendete Eigenschaft von WE-HA$^\omega$ ist die Möglichkeit konstruktiv Formeln durch äquivalente funktionale Terme zu repräsentieren. zu konstruieren.

Proposition 2.21. *Sei $A_0(\bar{x})$ eine quantorenfreie Formel von $\mathcal{L}_{\text{E-HA}^\omega}$ mit freien Variablen $\bar{x}$. Dann kann man einen geschlossenen Term t konstruieren, sodass*

$$\text{WE-HA}^\omega \vdash \forall \bar{x}(t(\bar{x}) =_0 0 \equiv A_0(\bar{x}))$$

Hieraus folgt unmittelbar

Korollar 2.22. *Für quantorenfreie Formeln $A_0 \in \mathcal{L}_{\text{E-HA}^\omega}$ gilt der Satz vom ausgeschlossenen Dritten auch in* WE-HA$^\omega$*:*

$$\text{WE-HA}^\omega \vdash A_0 \vee \neg A_0,$$

und insbesondere

$$\text{WE-HA}^\omega \vdash \neg\neg A_0 \supset A_0.$$

Um die Proposition zu beweisen ist das folgende Lemma hilfreich:

Lemma 2.23. WE-HA$^\omega$ *beweist die folgenden elementaren Eigenschaften:*

(a) $x + y = 0 \equiv x = 0 \wedge y = 0$
(b) $x \cdot y = 0 \equiv x = 0 \vee y = 0$
(c) $\text{sg}(x) \cdot y = 0 \equiv (x = 0 \supset y = 0)$
(d) $\text{sg}(x) = 0 \equiv x \neq 0$
(e) $|x - y| = 0 \equiv x = y$

Beweis. Mit doppelter Induktion, Proposition 2.19. Nur 2.23.(d) folgt aus 2.18.(d). □

Beweis (Proposition). Atomformeln von $\mathcal{L}_{\text{E-HA}^\omega}$ haben die Form $t = s$, und WE-HA$^\omega$ $\vdash t = s \equiv |t - s| = 0$, womit $t := \lambda ts.\,|t - s|$ geeignet ist. Die Aussage für alle weiteren Formeln folgt direkt aus Lemma 2.23. □

Proposition 2.24. *Für jeden Typ $\rho \in \mathbf{T}$ gibt es einen geschlossenen Term t (der nur den Rekursor R_0 vom Typ* 0 *nutzt), sodass*

$$\text{WE-HA}^\omega \vdash \forall x^0, y_1^\rho, y_2^\rho \left((x =_0 0 \supset t(xy_1y_2) =_\rho y_1) \wedge (x \neq_0 0 \supset t(xy_1y_2) =_\rho y_2)\right)$$

Beweis. Definiere

$$\chi(x^0, y_1^0, y_2^0) := R_0(x, y_1, \lambda n^0 m^0.y_2)$$

und arbeite in WE-HA$^\omega$. Dann ist

$$\chi(0, y_1^0 y_2^0) =_0 y_1$$

und

$$\begin{aligned}\chi(S(x), y_1^0, y_2^0) &=_0 (\lambda n^0 m^0.y_2)(R_0(x, y_1, y_2), x)\\ &=_0 y_2.\end{aligned}$$

Da $x \neq_0 0 \supset x =_0 S(pd(x))$, gilt

$$x \neq_0 0 \supset \chi(x, y_1, x_2) =_0 y_2.$$

Für $\rho = ((\rho_1, \dots, \rho_k) \to 0)$ seien $v_1^{\rho_1}, \dots, v_k^{\rho_k}$ verschiedene Variablen. Dann leistet

$$t := \lambda x^0 y_1^\rho y_2^\rho \bar{v}^{\bar{\rho}}.\chi(x, y_1(\bar{v}), y_2(\bar{v}))$$

das Gewünschte.

□

Kapitel 3

Gödels Dialectica Interpretation

Die konstruktive Natur der intuitionistischen Logik ermöglicht es, bei Vorhandensein eines Beweises, Zeugen für Existenzquantoren zu extrahieren. Eine Möglichkeit dies zu bewerkstelligen ist die Gödel'sche Dialectica Interpretation.

Definition 3.1. Wir bilden jede Formel $A(\bar{a})$ in $\mathscr{L}_{\text{E-HA}^\omega}$ mit freien Variablen $\bar{a}$ auf ihre *Dialectica-Interpretation* $A^D(\bar{a})$ ab. Diese hat die Form

$$A^D(\bar{a}) = \exists\bar{x}\forall\bar{y}A_D(\bar{x}|\bar{y}|\bar{a})$$

wobei $A_D(\bar{x}|\bar{y}|\bar{a})$ quantorenfrei ist. Die freien Variablen von $A_D(\bar{a})$ sind genau $\bar{a}$.

Bemerkung 3.2. Die Nutzung von Pipes „|" zwischen den Variablen von A_D dient zur besseren Lesbarkeit und trennt immer drei Tupel. Die in A^D

- existenzquantifizierten,
- allquantifizierten, und
- freien Variablen.

Die Definition erfolgt induktiv folgendermaßen:

- Für Atomformeln $A(\bar{a})$ ist $A(\bar{a}) = A^D(\bar{a}) = A_D(||\bar{a})$
- Für $A^D(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \exists\bar{x}\forall\bar{y}A_D(\bar{x}|\bar{y}|\bar{a}_1, \bar{a}_2)$, $B^D(\bar{a}_2, \bar{a}_3) = \exists\bar{u}, \exists\bar{v}B_D(\bar{u}|\bar{v}|\bar{a}_2, \bar{a}_3)$ definiere mit $\bar{a} = \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$, $z\bar{b} = \bar{a}$:

  1. $(A \wedge B)^D(\bar{a}) = \exists\bar{x}, \bar{u}\forall\bar{y}, \bar{v}\ (A_D(\bar{x}|\bar{y}|\bar{a}_1, \bar{a}_2) \wedge B_D(\bar{u}|\bar{v}|\bar{a}_2, \bar{a}_3))$
  2. $(A \vee B)^D(\bar{a}) = \exists z^0, \bar{x}, \bar{u}\forall\bar{y}, \bar{v}\ (z = 0 \supset A_D(\bar{x}|\bar{y}|\bar{a}_1, \bar{a}_2)) \wedge (z \neq 0 \supset B_D(\bar{u}|\bar{v}|\bar{a}_2, \bar{a}_3))$
  3. $(\forall z A(z, \bar{b}))^D = \exists\bar{X}\forall z, \bar{y}\ A_D(\bar{X}(z)|\bar{y}|\bar{a})$
  4. $(\exists z A(z, \bar{b}))^D = \exists z, \bar{x}\forall\bar{y}\ A_D(\bar{x}|\bar{y}|\bar{a})$
  5. $(A \supset B)^D(\bar{a}) = \exists\bar{U}, \bar{Y}\forall\bar{x}, \bar{v}\ \big(A_D(\bar{x}|\bar{Y}(\bar{x}, \bar{v})|\bar{a}_1, \bar{a}_2) \supset B_D(\bar{U}(\bar{x})|\bar{v}|\bar{a}_2, \bar{a}_3)\big)$

  Unsere Notation erlaubt auch die folgende, manchmal etwas einfachere, Darstellung:

  1. $(A \wedge B)_D(\bar{x}, \bar{u}|\bar{y}, \bar{v}|\bar{a}) = (A_D(\bar{x}|\bar{y}|\bar{a}_1, \bar{a}_2) \wedge B_D(\bar{u}|\bar{v}|\bar{a}_2, \bar{a}_3))$
  2. $(A \vee B)_D(z^0, \bar{x}, \bar{u}|\bar{y}, \bar{v}|\bar{a}) = (z = 0 \supset A_D(\bar{x}|\bar{y}|\bar{a}_1, \bar{a}_2)) \wedge (z \neq 0 \supset B_D(\bar{u}|\bar{v}|\bar{a}_2, \bar{a}_3))$
  3. $(\forall z A(z))_D(\bar{X}|z, \bar{y}|\bar{b}) = A_D(\bar{X}(z)|\bar{y}|z, \bar{b})$

4. $(\exists z A(z))_D(z, \bar{x}|\bar{y}|\bar{b}) = A_D(\bar{x}|\bar{y}|z, \bar{b})$
5. $(A \supset B)_D(\bar{U}, \bar{Y}|\bar{x}, \bar{v}|\bar{a}) = A_D(\bar{x}|\bar{Y}(\bar{x}, \bar{v})|\bar{a}_1, \bar{a}_2) \supset B_D(\bar{U}(\bar{x})|\bar{v}|\bar{a}_2, \bar{a}_3)$

Bemerkung 3.3. Aus 1. und 5. folgt mit $\neg A = (A \supset \bot)$, dass $(\neg(A(\bar{a})))^D = \exists \bar{Y} \forall \bar{x}\, \neg A_D(\bar{x}|\bar{Y}(\bar{x})|\bar{a})$

Satz 3.4. *Sei $\mathscr{P} \subset \mathscr{L}_{\text{E-HA}^\omega}$ eine Menge von Formeln der Form $\forall \bar{x}^{\bar{\sigma}} B_0(\bar{x})$, wobei B_0 quantorenfrei ist, und $A(\bar{a})$ eine Formel die nur $\bar{a}$ frei enthält. Dann impliziert*

$$\textit{WE-HA}^\omega + \mathscr{P} \vdash A(\bar{a}),$$

dass

$$\textit{WE-HA}^\omega + \mathscr{P} \vdash \forall \bar{y} A_D(\bar{t}(\bar{a})|\bar{y}|\bar{a}).$$

wobei $\bar{t}$ ein Tupel an Termen in $\mathscr{L}_A(IL)$ ist, welches aus dem Beweis der Annahme extrahiert werden kann.

Beweis. Wir verwenden Induktion über die Länge des Beweises von $A(\bar{a})$.
Logische Axiome und Regeln:

1. $\tilde{A} = \tilde{A}(\bar{a}) = A(\bar{a}) \supset A(\bar{a}) \wedge A(\bar{a})$: Da

$$(A \wedge A)(\bar{a})^D = \exists \bar{x}, \bar{u}, \forall \bar{y}, \bar{v}(A_D(\bar{x}|\bar{y}|\bar{a}) \wedge A_D(\bar{u}|\bar{y}|\bar{a}))$$

ist $(A \wedge A)_D(\bar{x}, \bar{u}|\bar{y}, \bar{v}|\bar{a}) = A_D(\bar{x}|\bar{y}|\bar{a}) \wedge A_D(\bar{u}|\bar{y}|\bar{a})$ und

$$\begin{aligned}&(A \supset A \wedge A)^D(\bar{a}) = \\ &\exists \bar{U}, \bar{Y} \forall \bar{x}, \bar{v}(A_D(\bar{x}|\bar{Y}(\bar{x}, \bar{v})|\bar{a}) \supset (A \wedge A)_D(\bar{U}(\bar{x})|\bar{v}|\bar{a})) = \\ &\exists \bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{Y} \forall \bar{x}, \bar{v}_1, \bar{v}_2(A_D(\bar{x}|\bar{Y}(\bar{x}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)|\bar{a}) \supset A_D(\bar{U}_1(\bar{x})|\bar{v}_1|\bar{a}) \wedge A_D(\bar{U}_2(\bar{x})|\bar{v}_2|\bar{a}))\end{aligned}$$

indem wir $\bar{U}_1, \bar{U}_2$ mit $\bar{U}$ und $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ mit $\bar{v}$ identifizieren.
Also ist

$$\tilde{A}_D(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{Y}|\bar{x}, \bar{v}_1, \bar{v}_2|\bar{a}) = A_D(\bar{x}|\bar{Y}(\bar{x}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)|\bar{a}) \supset A_D(\bar{U}_1(\bar{x})|\bar{v}_1|\bar{a}) \wedge A_D(\bar{U}_2(\bar{x})|\bar{v}_2|\bar{a})$$

Nach Proposition 2.21 gibt es einen geschlossenen Term t_{A_D}, sodass WE-HA$^\omega$ $\vdash$ $t_{A_D}(\bar{a}|\bar{x}|\bar{y}) =_0 0 \equiv A_D(\bar{x}|\bar{y}|\bar{a})$. Nach Proposition 2.24 gibt es ein Tupel $\bar{t}_{\bar{Y}}$ geschlossener Terme $t_{\bar{y}}$ (für jedes Element von Y einen), für die alle gilt

$$\text{WE-HA}^\omega \vdash \bar{t}_{\bar{Y}}(\bar{a}, \bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = \begin{cases} \bar{y}_1, & \text{falls} \quad t_{A_D}(\bar{a}, \bar{x}, \bar{y}_1) \neq 0 \\ \bar{y}_2, & \text{falls} \quad t_{A_D}(\bar{a}, \bar{x}, \bar{y}_1) = 0 \end{cases}$$

Damit erfüllen $\bar{t}_{\bar{U}_1} := \bar{t}_{\bar{U}_2} := \lambda \bar{a}\bar{x}.\bar{x}$ und $\bar{t}_{\bar{Y}}$ die funktionale Interpretation von $A \supset A \wedge A$. Mit $\bar{y} = \bar{x}, \bar{v}_1, \bar{v}_2$ ist nämlich mit in WE-HA$^\omega$

$$\begin{aligned}&\tilde{A}_D(\bar{t}(\bar{a})|\bar{y}|\bar{a}) = \\ &\tilde{A}_D(t_{\bar{U}_1}(\bar{a}), t_{\bar{U}_2}(\bar{a}), \bar{t}_{\bar{Y}}(\bar{a})|\bar{y}|\bar{a}) \equiv \\ &\tilde{A}_D((\lambda \bar{x}.\bar{x}), (\lambda \bar{x}.\bar{x}), \bar{t}_{\bar{Y}}(\bar{a})|\bar{y}|\bar{a}) \equiv \\ A_D(\bar{x}|\bar{t}_{\bar{Y}}(\bar{a}, \bar{x}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)|\bar{a}) \supset\ &A_D((\lambda \bar{x}.\bar{x})(\bar{x})|\bar{v}_1|\bar{a}) \wedge A_D((\lambda \bar{x}.\bar{x})(\bar{x})|\bar{v}_2|\bar{a}) \equiv \\ A_D(\bar{x}|\bar{t}_{\bar{Y}}(\bar{a}, \bar{x}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)|\bar{a}) \supset\ &A_D(\bar{x}|\bar{v}_1|\bar{a}) \wedge A_D(x|\bar{v}_2|\bar{a})\end{aligned}$$

Da A_D quantorenfrei ist, gilt WE-HA$^\omega$ $\vdash A_D \vee \neg A_D$, und eine Fallunterscheidung liefert WE-HA$^\omega$ $\vdash \forall \bar{y} \tilde{A}_D(\bar{t}(\bar{a})|\bar{y}|\bar{a})$.

2. $A \vee A \supset A$:

$$\begin{aligned}(A \vee A \supset A)^D &= \exists \bar{U}, \bar{Y} \forall \bar{x}, \bar{v}((A \vee A)_D(\bar{x}|\bar{Y}(\bar{x},\bar{v})|\bar{a}) \supset A_D(\bar{U}(\bar{x})|\bar{v}|\bar{a}))\\ &= \exists \bar{U}, \bar{Y}_1, \bar{Y}_2 \forall z^0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{v}\end{aligned}$$
$$\big(((z = 0 \supset A_D(\bar{x}_1|\bar{Y}_1(z,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{v})|\bar{a})) \wedge (z \neq 0 \supset A_D(\bar{x}_2|\bar{Y}_2(z,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{v})|\bar{a})))$$
$$\supset A_D(\bar{U}(z,\bar{x}_1,\bar{x}_2)|\bar{v}|\bar{a})\big)$$

Durch Unifikation erhalten wir für $\bar{U}, \bar{Y}_1, \bar{Y}_2$ passende Terme $t_{\bar{U}}, t_{\bar{Y}_1}, t_{\bar{Y}_2}$ mit

$$\begin{aligned}\text{WE-HA}^\omega \vdash t_{\bar{U}}(\bar{a}, z, \bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \begin{cases} \bar{x}_1 & \text{falls} \quad z = 0 \\ \bar{x}_2 & \text{sonst.}\end{cases}\\ t_{\bar{Y}_1} &:= \lambda \bar{a} z \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{v}.\bar{v}\\ t_{\bar{Y}_2} &:= \lambda \bar{a} z \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{v}.\bar{v},\end{aligned}$$

die das Gewünschte leisten.

3. $A \supset A \vee B$:

$$\begin{aligned}(A \supset A \vee B)^D(\bar{a}\bar{b}) &= \exists \bar{U}, \bar{Y} \forall \bar{x}, \bar{v}\left(A_D(\bar{x}|\bar{Y}(\bar{x},\bar{v})|\bar{a}) \supset (A \vee B)_D(\bar{U}(\bar{x})|\bar{v}|\bar{a}\bar{b})\right)\\ &= \exists Z, \bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{Y} \forall \bar{x}, \bar{v}_1, \bar{v}_2\end{aligned}$$
$$(A_D(\bar{x}|\bar{Y}(\bar{x},\bar{v}_1,\bar{v}_2)|\bar{a}) \supset \big(Z(\bar{x}) = 0 \supset A_D(\bar{U}_1(\bar{x})|\bar{v}_1|\bar{a})) \wedge (Z(\bar{x}) \neq 0 \supset B_D(\bar{U}_2(\bar{x})|\bar{v}_2|\bar{b}))\big)$$

Setzen wir $t_Z := \lambda \bar{a}\bar{b}\bar{x}.0^0$, so können wir $t_{\bar{U}_2}$ beliebig wählen $t_{\bar{U}_2} := \lambda \bar{a}\bar{b}\bar{x}.\mathcal{O}$, und die restlichen Terme unifizieren $t_{\bar{U}_1} := \lambda \bar{a}\bar{b}\bar{x}.\bar{x}$, $t_{\bar{Y}} := \lambda \bar{a}\bar{b}\bar{x}, \bar{v}_1, \bar{v}_2.\bar{v}_1$.

4. $A \wedge B \supset A$: Analog zu den obigen Schritten

5. $A \vee B \supset B \vee A$: Analog

6. $A \wedge B \supset B \wedge A$: Analog

7. $\perp \supset A$: $(\perp \supset A)^D = \exists \bar{U} \forall \bar{x}, \bar{v}(\perp \supset A_D(\bar{U}(\bar{x})|\bar{v}|\bar{a}))$. Wähle $t_{\bar{U}} = \lambda \bar{a}\bar{x}.\mathcal{O}$.

8. $\forall z A \supset A[t/z]$: Es seien $\bar{a}$ alle freien Variablen von $A[t/z]$. Da $(\forall z A)_D(\bar{a}) = A_D(\bar{X}(z)|\bar{y}z|\bar{a})$ (wobei z hier zu den allquantifizierten Variablen in $(\forall z A)^D$ gehört), ist

$$\begin{aligned}(\forall z A \supset A[t/z])_D &= \exists \bar{U}, \bar{Y} \forall \bar{x}, \bar{v}((\forall z A)_D(\bar{x}|\bar{Y}(\bar{x},\bar{v}), z|\bar{a}) \supset (A[t/z])_D(\bar{U}(\bar{x})|\bar{v}, z|\bar{a}))\\ &= \exists \bar{U}, \bar{Y}', Z \forall \bar{X}, \bar{v}(A_D(\bar{X}(Z(\bar{X},\bar{v}))|\bar{Y}'(\bar{X},\bar{v})Z(\bar{X},\bar{v})|\bar{a}) \supset A_D(\bar{U}(\bar{X})|\bar{v}, t(\bar{a})|\bar{a}))\end{aligned}$$

Nun sei $t_Z = \lambda \bar{a}\bar{X}\bar{v}.t(\bar{a})$, $t_{\bar{U}} = \lambda \bar{a}\bar{X}.\bar{X}(t(\bar{a}))$, $t_{\bar{Y}'} = \lambda \bar{a}\bar{x}\bar{v}.\bar{v}$.

9. $A[t/z] \supset \exists z A$:

$$\begin{aligned}(A[t/z] \supset \exists z A)_D &= \exists \bar{U}, \bar{Y} \forall \bar{x}, \bar{v}\left((A[t/z])_D(\bar{x}|\bar{Y}(\bar{x},\bar{v})z|\bar{a}) \supset (\exists z A)_D(\bar{U}(\bar{x})|\bar{v}z|\bar{a})\right)\\ &= \exists \bar{U}', Z, \bar{Y}' \forall \bar{x}, \bar{v}\left(A_D(\bar{x}|\bar{Y}(\bar{x},\bar{v})t(\bar{a})|\bar{a}) \supset A_D(\bar{U}(\bar{x})|\bar{v}, Z(\bar{x})|\bar{a})\right)\end{aligned}$$

Nun seien $t_Z = \lambda \bar{a}\bar{x}.t(\bar{a})$, $t_{\bar{U}} = \lambda \bar{a}\bar{x}.\bar{x}$, $t_{\bar{Y}} = \lambda \bar{a}\bar{x}\bar{v}.\bar{v}$.

10. **Modus Ponens**: Gegeben

$$\forall \bar{y} A_D(\bar{t}_1(\bar{a}, \bar{b}) | \bar{y} | \bar{a}, \bar{b}) \tag{3.1}$$

und

$$\begin{aligned} &\forall \bar{x}, \bar{v}(A \supset B)_D(\bar{t}_2(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}), \bar{t}_3(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) | \bar{x}, \bar{v} | \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \\ =&\forall \bar{x}, \bar{v}(A_D(\bar{x} | \bar{t}_2(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{x}, \bar{v}) | \bar{a}, \bar{b}) \supset B_D(\bar{t}_3(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{x}) | \bar{v} | \bar{b}, \bar{c})) \end{aligned} \tag{3.2}$$

konstruieren wir einen Term t_4, sodass WE-HA$^\omega$ $\vdash \forall \bar{v} B_D(\bar{t}_4(\bar{b}, \bar{c}) | \bar{v} | \bar{b}, \bar{c})$ wie folgt:
Wir unifizieren (3.1) mit der linken Seite der Implikation in (3.2). Setzen wir in (3.2) $\bar{x} := \bar{t}_1(\bar{a}, \bar{b})$, so gilt

$$\forall \bar{v}(A_D(\bar{t}_1(\bar{a}) | \bar{t}_2(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{t}_1(\bar{a}), \bar{v}) | \bar{a}, \bar{b}) \supset B_D(\bar{t}_3(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{t}_1(\bar{a})) | \bar{v} | \bar{b}, \bar{c}))$$

Mit $\bar{y} := \bar{t}_2(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{t}_1(\bar{a}, \bar{b}), \bar{v})$ in (3.1) gilt

$$A_D(\bar{t}_1(\bar{a}, \bar{b}) | \bar{t}_2(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{t}_1(\bar{a}, \bar{b}), \bar{v}) | \bar{a}, \bar{b}).$$

Daher ist mit Modus Ponens auch

$$B_D(\bar{t}_3(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{t}_1(\bar{a})) | \bar{v} | \bar{b}, \bar{c}))$$

beweisbar. Es sei nun $t_4 := \lambda \bar{b} \bar{c}. \bar{t}[\bar{b}, \bar{c}]$, wobei $\bar{t}[\bar{b}, \bar{c}]$ gleich dem Resultat des Ersetzens von $\bar{a}$ in $t_3(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{t}_1(\bar{a}))$ durch beliebige Terme geeigneten Typs ist. Es folgt $\forall \bar{v} B_D(\bar{t}_4(\bar{b}, \bar{c}) | \bar{v} | \bar{b}, \bar{c})$.

11. **Syllogismus**: Gegeben die Formeln

$$\begin{gathered} \forall \bar{x}, \bar{v}(A_D(\bar{x} | \bar{t}_1(\bar{a}, \bar{x}, \bar{v}) | \bar{a}) \supset B_D(\bar{t}_2(\bar{a}, \bar{x}) | \bar{v} | \bar{a}')) \\ \forall \bar{u}, \bar{w}(B_D(\bar{u} | \bar{t}_3(\bar{a}', \bar{u}, \bar{w}) | \bar{a}') \supset C_D(\bar{t}_4(\bar{a}', \bar{u}) | \bar{w} | \bar{a}_1)) \end{gathered}$$

mit $\bar{a} = \bar{a}', \bar{a}'', \bar{a}' = \bar{a}_1, \bar{a}_2$ benötigen wir Terme t_5, t_6, sodass

$$\forall \bar{x}, \bar{v}(A_D(\bar{x} | \bar{t}_5(\bar{a}, \bar{x}, \bar{v}) | \bar{a}) \supset C_D(\bar{t}_6(\bar{a}, \bar{x}) | \bar{v} | \bar{a}_1))$$

gilt.
Setzen wir $\bar{v} = \bar{t}_3(\bar{a}, \bar{t}_2(\bar{a}', \bar{x}), \bar{w})$, so erhalten wir

$$\forall \bar{x}, \bar{w}(A_D(\bar{x} | t_1(\bar{a}, \bar{x}, \bar{t}_3(\bar{a}, \bar{t}_2(\bar{a}', \bar{x}), \bar{w})) | \bar{a}) \supset B_D(\bar{t}_2(\bar{a}, \bar{x}) | \bar{t}_3(\bar{a}, \bar{t}_2(\bar{a}', \bar{x}), \bar{w}) | \bar{a}'))$$

und mit $\bar{u} = \bar{t}_2(\bar{a}, \bar{x})$ erhalten wir

$$\forall \bar{x}, \bar{w}(B_D(\bar{t}_2(\bar{a}, \bar{x}) | \bar{t}_3(\bar{a}', \bar{t}_2(\bar{a}, \bar{x}), \bar{w}) | \bar{a}') \supset C_D(\bar{t}_4(\bar{a}', \bar{t}_2(\bar{a}, \bar{x})) | \bar{w} | \bar{a}_1)).$$

Also erfüllen $\bar{t}_5 := \lambda \bar{a} \bar{x} \bar{w}. \bar{t}_1(\bar{a}, \bar{x}, \bar{t}_3(\bar{a}, \bar{t}_2(\bar{a}', \bar{x}), \bar{w}))$, und $t_6 := \lambda \bar{a} \bar{x}. \bar{t}_4(\bar{a}', \bar{t}_2(\bar{a}, \bar{x}))$ das Gewünschte.

12. **Importation, Exportation**: Jede Lösung von $(A \wedge B \supset C)^D$ ist auch eine von $(A \supset (B \supset C))^D$ und umgekehrt.

13. **Expansionsregel**: Sei $C^D(\bar{a}) = \exists \bar{p} \forall \bar{q} C_D(\bar{p}|\bar{q}|\bar{a})$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Termtupel $\bar{t}_1, \bar{t}_2$ mit

$$\text{WE-HA}^\omega \vdash \forall \bar{x}, \bar{v}(A_D(\bar{x}|\bar{t}_1(\bar{a},\bar{x},\bar{v})|\bar{a}_1) \supset B_D(\bar{t}_2(\bar{a},\bar{x})|\bar{v}|\bar{a}_2)), \tag{3.3}$$

wobei $\bar{a} = \bar{a}_1, \bar{a}_2$.

Nun ist

$$\begin{aligned}
&(C \vee A \supset C \vee B)^D(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = \\
\exists \bar{U}, \bar{Y} \forall \bar{x}, \bar{v}((C \vee A)_D(\bar{x}|\bar{Y}(\bar{x},\bar{v})|\bar{a}_1, \bar{a}_2) &\supset (C \vee B)_D(\bar{U}(\bar{a})|\bar{v}|\bar{a}_1 \bar{a}_3)) \equiv \\
\exists Z, \bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{Y}_1, \bar{Y}_2 \forall \bar{x}, \bar{v}\big((z = 0 &\supset C_D(\bar{x}_1|\bar{Y}_1(\bar{x},\bar{v})|\bar{a}_1)) \\
&\wedge (z \neq 0 \supset A_D(\bar{x}_2|\bar{Y}_2(z,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{v})|\bar{a}_2)) \\
&\supset (Z(\bar{x}) = 0 \supset C_D(\bar{U}_1(\bar{x})|\bar{v}_1|\bar{a}_1)) \\
&\wedge (Z(\bar{x}) \neq 0 \supset B_D(\bar{U}_2(\bar{x})|\bar{v}_2|\bar{a}_3))\big)
\end{aligned}$$

mit $\bar{x} = z, \bar{x}_1, \bar{x}_2$ und $\bar{v} = \bar{v}_1, \bar{v}_2$.

Wähle

$$\begin{aligned}
t_Z &:= \lambda \bar{a}\bar{x}.z, & \bar{t}_{\bar{U}_1} &:= \lambda \bar{a}\bar{x}.\bar{x}_1, & \bar{t}_{\bar{U}_2} &:= \lambda \bar{a}\bar{x}.\bar{t}_2(\bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{x}_2) \\
\bar{t}_{\bar{Y}_1} &:= \lambda \bar{a}\bar{x}\bar{v}.\bar{v}_1, & & & \bar{t}_{\bar{Y}_2} &:= \lambda \bar{a}\bar{x}\bar{v}.\bar{t}_1(\bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{x}_1, \bar{v}_2)
\end{aligned}$$

Damit reduziert sich die zu verifizierende Formel auf

$$\begin{aligned}
\forall \bar{x}, \bar{v}\big(&(z = 0 \supset C_D(\bar{x}_1|\bar{v}_1|\bar{a}_1)) \\
&\wedge (z \neq 0 \supset A_D(\bar{x}_2|\bar{t}_1(\bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{x}_1, \bar{v}_2)|\bar{a}_2)) \\
&\supset (z = 0 \supset C_D(x_1|\bar{v}_1|\bar{a}_1)) \\
&\wedge (z \neq 0 \supset B_D(\bar{t}_2(\bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{x}_2)|\bar{v}_2|\bar{a}_3))\big).
\end{aligned}$$

Diese ist nach Induktionshypothese beweisbar.

14. **Quantorenregeln**: Betrachten wir die Regel

$$\frac{B \supset A}{B \supset \forall z A,}$$

wobei z nicht frei in B ist. Seien $\bar{a} = \bar{a}_1, \bar{a}_2$ alle freien Variablen in $B \supset \forall z A$. Nach Induktionshypothese gibt es geschlossene Terme $\bar{t}_1, \bar{t}_2$, sodass

$$\text{WE-HA}^\omega + \mathscr{P} \vdash \forall z\bar{u}, \bar{y}(B_D(\bar{u}|\bar{t}_1(\bar{a}, z, \bar{u}, \bar{y})|\bar{a}_1) \supset A_D(\bar{t}_2(\bar{a}, z, \bar{u})|\bar{y}|\bar{a}_2))$$

Da $(\forall z A)_D(\bar{X}|z, \bar{y}|\bar{a}_2) = A_D(\bar{X}(z)|\bar{y}|\bar{a}_2)$, ist

$$(B \supset \forall z A)_D(\bar{U}, \bar{Y}|\bar{u}, z, \bar{v}|\bar{a}) = B_D(\bar{u}|\bar{Y}(\bar{u}, z, \bar{v})|\bar{a}_1) \supset A_D(\bar{U}(\bar{u}, z)|\bar{v}|\bar{a}_2).$$

Mit $\bar{t}_{\bar{U}} := \lambda \bar{a}\bar{u}\bar{z}.\bar{t}_2(\bar{a}, z, \bar{u})$ und $\bar{t}_{\bar{Y}} := \lambda \bar{a}\bar{u}z\bar{v}.\bar{t}_1(\bar{a}, z, \bar{u}, \bar{y})$ gilt das Gewünschte.

Axiome für $=_0, S, \Pi, \Sigma, R$:
Sind nur allquantifiziert, daher identisch zu ihrer Dialectica Interpretation.
Die quantorenfreien Extensionalitätsaxiome

Auch hier sind sowohl Voraussetzung als auch Schluss rein allquantifiziert.
Die allquantifizierten Axiome von $\mathcal{P}$
Folgen genau der gleichen Argumentation.
Das Induktionsschema
Nach Korollar 2.12 ist das Induktionsschema äquivalent zur Regel

$$\frac{B(0) \wedge \forall x^0(B(x) \supset B(S(x)))}{\forall x B(x)}.$$

Sei $(B(y^0))^D = \exists \bar{u} \forall \bar{v} B_D(\bar{u}|\bar{v}|y, \bar{a})$. Angenommen wir haben bereits gezeigt, dass

$$\begin{aligned}&\forall \bar{v} B_D(\bar{t}_1(\bar{a})|\bar{v}|0, \bar{a}) \text{ und}\\ &\forall \bar{u}, \bar{w}(B_D(\bar{u}|\bar{t}_2(y, \bar{a}, \bar{u}, \bar{w})|y, \bar{a}) \supset B_D(\bar{t}_3(y, \bar{a}, \bar{u})|\bar{w}|y+1, \bar{a})).\end{aligned}$$

Dann definiere $\bar{t}$ durch simultane primitive Rekursion vermöge

$$\begin{aligned}&\bar{t}(\bar{a}, 0) = \bar{t}_1(\bar{a})\\ &\bar{t}(\bar{a}, y+1) = \bar{t}_3(y, \bar{a}, \bar{t}(\bar{a}, y)\end{aligned}$$

Es gilt (nach Substitution von $\bar{u}$ mit $\bar{t}(\bar{a}, y)$)

$$\begin{aligned}&\forall \bar{v} B_D(\bar{t}(\bar{a}, 0)|\bar{v}|0, \bar{a}) \text{ und}\\ &\forall y \forall \bar{w}\big(B_D(\bar{t}(\bar{a}, y)|\bar{t}_2(y, \bar{a}, \bar{t}(\bar{a}, y), \bar{w})|y, \bar{a}) \supset B_D(\bar{t}(\bar{a}, y+1)|\bar{w}|y+1, \bar{a})\big),\end{aligned}$$

und weiter

$$(\forall y \forall \bar{v} B_D(\bar{t}(\bar{a}, y)|\bar{v}|y, \bar{a})) \supset (\forall \bar{v} B_D(\bar{t}(\bar{a}, y+1)|\bar{v}|y+1, \bar{a})).$$

Insgesamt gilt also nach Induktionsregel

$$\forall y \forall \bar{v} B_D(\bar{t}(\bar{a}, y)|\bar{v}, y|\bar{a}).$$

□

Kapitel 4

Negationsübersetzungen

Thema dieses Abschnitts sind Einbettungen Beweise klassischer Logik in intuitionistische Systeme. Konkret wird her als System in klassicher Logik die schwach extensionale Peanoarithmetik und als intuitionistische System die schwach extensionale Heytingarithmetik verwendet.

Definition 4.1 (Schwach extensionale Peanoarithmetik)**.** Die schwach extensionale Peanoarithmetik WE-PA$^\omega$ verwendet die Sprache und alle Regeln von WE-HA$^\omega$, sowie das Axiom *tertium non datur* $A \vee \neg A$.

4.1 Doppelte Negation in intuitionistischer Logik

Zum besseren Verständnis der Negationsübersetzungen folgen ein paar Resultate über doppelte Negation in intuitionistische Logik. Obwohl sie hier der Einfachheit halber in WE-HA$^\omega$ formuliert sind, gelten sie allgemein.

Lemma 4.2. *(vgl. [Dal13][Lemma 6.2.1, 6.2.2]) Für alle $\mathscr{L}_{\text{E-HA}^\omega}$-Formeln A, B gilt*

(a) $\vdash_H A \supset \neg\neg A$
(b) $\vdash_H (A \wedge \neg A) \supset \bot$
(c) $\vdash_H \neg A \equiv \neg\neg\neg A$
(d) $\vdash_H \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
(e) $\vdash_H \neg\neg(A \vee \neg A)$
(f) $\vdash_H (A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$
(g) $\vdash_H (\neg A \vee B) \supset (A \supset B)$
(h) $\vdash_H (A \wedge \neg B) \supset \neg(A \supset B)$
(i) $\vdash_H \neg(A \wedge B) \equiv A \supset \neg B$
(j) $\vdash_H A \supset \neg B \equiv B \supset \neg A.$
(k) $\vdash_H \neg\neg(A \supset B) \equiv (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$
(l) $\vdash_H \neg\neg(A \supset B) \equiv (A \supset \neg\neg B)$
(m) $\vdash_H (A \supset \neg B) \equiv (\neg\neg A \supset \neg B)$
(n) $\vdash_H \neg\neg\forall x \neg\neg A(x) \equiv \forall x \neg\neg A(x)$
(o) $\neg\forall x \neg A \equiv \neg\neg\exists x A$

Beweis. Wir verwenden mehrmals das Deduktionstheorem Satz 2.9.

(a) Mit Modus Ponens folgt WE-HA$^\omega$, $A, (A \supset \bot) \vdash_H \bot$. Die Formel $A \supset \neg\neg A$ folgt durch zweimalige Anwendung des Deduktionstheorems

(b) Aufgrund der Abschwächungsaxiome $A \wedge \neg A \vdash_H A$ und $A \wedge \neg A \vdash_H \neg A$ kann direkt (a) angewendet werden.

(c) Aus (a) folgt direkt $\vdash_H \neg A \supset \neg\neg\neg A$. Für die Umkehrung bemerken wir, dass $A, \neg\neg\neg A \vdash_H \bot$, und daher $\neg\neg\neg A \vdash_H \neg A$.

(d) Aus $(A \vee B) \supset \bot, A \vdash_H \bot$ (mit dem Abschwächungsaxiom) folgt die eine Implikation. Die andere folgt, da $\neg A \wedge \neg B, A \vdash_H \bot$, also $\neg A \wedge \neg B \vdash_H A \supset \bot$ und $\neg A \wedge \neg B \vdash_H B \supset \bot$ mit Lemma 2.11.(c).

(e) Aus (c) erhalten wir $\vdash_H \neg(\neg A \wedge \neg\neg A)$. Dies ist mit (d) äquivalent zu $\neg\neg(A \vee \neg A)$.

(f) Mit der Syllogismusregel folgt $A \supset B, B \supset \bot \vdash_H A \supset \bot$, und mit zweimaliger Anwendung des Dedutionstheorems die gewünschte Formel.

(g) Mit (d) und Lemma 2.11.(f) folgt direkt $\neg A \vee B, \neg\neg A, \neg B \vdash_H \bot$, (da $\neg(\neg A, \vee B) \equiv \neg\neg A \wedge \neg B$). Mit (a) erhalten wir $\neg A \vee B, A \vdash_H B$.

(h) Da $A \wedge \neg B, A \supset B \vdash_H \bot$, gilt $A \wedge \neg B \vdash_H \neg(A \supset B)$.

(i) Die Implikation $\neg(A \wedge B) \supset A \supset \neg B$ folgt direkt, da $\neg(A \wedge B), A, B \vdash_H \bot$. Die andere Richtung erhalten wir, da $A \supset \neg B, (A \wedge B) \vdash_H \neg B \wedge B$.

(j) Folgt direkt mit (i) und der Symmetrie der Konjunktion.

(k) Mit (f) angewendet auf (h) erhalten wir $\vdash_H \neg\neg(A \supset B) \supset \neg(A \wedge \neg B)$, und damit

$$\neg\neg(A \supset B), A, \neg B \vdash_H \bot.$$

Daher gilt $\neg\neg(A \supset B), \neg B \vdash_H \neg A$ und

$$\neg\neg(A \supset B), \neg\neg A \vdash_H \neg\neg B,$$

also $\neg\neg(A \supset B) \vdash_H \neg\neg A \supset \neg\neg B$.

Für die Umkehrung bemerken wir mit (g), (f) und (d), dass $\vdash_H \neg(A \supset B) \supset (\neg\neg A \wedge \neg B)$, und daher $\neg(A \supset B), \neg\neg A \supset \neg\neg B \vdash_H \bot$. Wir folgern $\neg\neg A \supset \neg\neg B \vdash_H \neg\neg(A \supset B)$.

(l) Mit (k) und (a) erhalten wir $\neg\neg(A \supset B), A \vdash_H \neg\neg B$. Für die andere Richtung zeigen wir, dass $A \supset \neg\neg B, \neg(A \supset B) \vdash_H \bot$. Mit (f) angewendet auf (g) kann man aus $\neg(A \supset B)$ die Formel $\neg(\neg A \vee B)$ schließen. Diese ist laut (d) äquivalent zu $\neg\neg A \wedge \neg B$. Es genügt also zu zeigen, dass $\neg\neg(A \supset B), \neg\neg A, \neg B \vdash_H \bot$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(a)\neg B \supset \neg\neg\neg B \quad \dfrac{\neg\neg(A \supset B)}{\neg\neg\neg B \supset \neg A}\,(f)}{\neg B \supset \neg A} \qquad \neg B}{\neg A} \qquad \neg\neg A}{\bot}\,(b)$$

(m) Die Implikation $(\neg\neg A \supset \neg B) \vdash_H (A \supset \neg B)$ folgt direkt mit (a). Die andere Implikation erhalten wir, indem wir Item (j) auf $A \supset \neg B$ anwenden. Es folgt $A \supset \neg B, \neg\neg A, B \vdash_H \bot$.

(n) Die Implikation $\forall x \neg\neg A \supset \neg\neg\forall x \neg\neg A$ folgt direkt aus (a). Für die andere Richtung wenden wir (k) auf das Axiom $\forall x \neg\neg A \supset \neg\neg A$ an, und erhalten mit (c) die äquivalente Formel $\neg\neg\forall x \neg\neg A \supset \neg\neg A$.

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \neg(A \wedge B), A \wedge B \vdash_H \bot \\
\Leftrightarrow \quad & \neg(A \wedge B), B \vdash_H \neg A \\
\Leftrightarrow \quad & \neg(A \wedge B), \neg\neg A \wedge \neg\neg B, B \vdash_H \bot \\
\Leftrightarrow \quad & \neg(A \wedge B), \neg\neg A \wedge \neg\neg B \vdash_H \neg B \\
\Leftrightarrow \quad & \neg(A \wedge B), \neg\neg A \wedge \neg\neg B \vdash_H \bot,
\end{aligned}$$

und daher $\neg\neg A \wedge \neg\neg B \vdash_H \neg\neg(A \wedge B)$.

(o) Aus dem Axiom $A \supset \exists x A$ und (a) folgt $A \supset \neg\neg\exists x A$. Diese Formel ist mit (j) äquivalent zu $\neg\exists x A \supset \neg A$. Mit dem Axiom $\neg A \supset \forall x \neg A$ und (f) erhalten wir $\neg\forall x \neg A \supset \neg\neg\exists x A$.

Für die anrere Richtung wenden wir (f) auf das Axiom $\forall x \neg A \supset \neg A$ an, um $A \supset \neg\forall x \neg A$ zu erhalten. Die Quantorenregel (I$\exists$) liefert $\exists x A \supset \neg\forall x \neg A$. Mit (a) folgt $\neg\neg\exists x A \supset \neg\forall x \neg A$.

□

4.2 Krivines Negationsübersetzung

Die erste Negationsübersetzung von Formeln der Peano-Arithmetik in (klassisch) äquivalente, stärkere Formeln der Heyting-Arithmetik, die Beweisbarkeit bewahrt, geht in gleichem Maße auf Kurt Gödel (vgl. [Göd33]) und Gerhard Gentzen zurück.
Wier führen hier eine etwas effizientere Übersetzung nach Jean-Louis Krivine ein.

Definition 4.3. Diese Negationsübersetzung wurde von J.L. Krivine in [Kri90] eingeführt, und von T. Streicher und U. Kohlenbach in [SR98] wie folgt erweitert $A' = \neg A^*$ einer Formel A ist induktiv definiert wie folgt

(K1) $P^* = \neg P$, falls P atomar ist,

(K2) $(A \wedge B)^* = A^* \vee B^*$,

(K3) $(A \vee B)^* = A^* \wedge B^*$,

(K4) $(A \supset B)^* = A' \wedge B^*$,

(K5) $(\exists x A)^* = \neg\exists x A'$.

(K6) $(\forall x A)^* = \exists x A^*$,

Lemma 4.4. *Krivines Negationsübersetzung hat in* WE-HA$^\omega$ *die folgenden Eigenschaften:*

(a) *Ist A quantorenfrei, gilt* $A \equiv A'$.
(b) $(A \wedge B)' \equiv A' \wedge B'$
(c) $(A \vee B)' \equiv \neg\neg(A' \vee B')$
(d) $(A \supset B)' \equiv A' \supset B'$
(e) $(\forall x A)' \equiv \neg\neg\forall x A'$

Beweis. (a) Klassische Logik beweist $A \equiv A'$, und für quantorenfreie Formeln gilt $A \vee \neg A$ (Korollar 2.22).

(b) Mit Lemma 4.2.(d) $(A \wedge B)' = \neg(A^* \vee B^*) \equiv A' \wedge B'$.

(c) Mit Lemma 4.2.(d),(i), und (m)

$$(A \vee B)' = \neg(A^* \wedge B^*) \equiv (A^* \supset B') \equiv (\neg\neg A^* \supset B') \equiv \neg(\neg A' \wedge \neg B') \equiv \neg\neg(A' \vee B').$$

(d) Auch mit Lemma 4.2.(i) $(A \supset B)' = \neg(A' \wedge B^*) \equiv A' \supset B'$

(e) Mit Lemma 4.2.(c),(o) $(\forall x A)' = \neg\exists x A^* \equiv \neg\neg\neg\exists x A^* \equiv \neg\neg\forall x \neg B^* = \neg\neg\forall x B'$.

□

Satz 4.5. *Falls* WE-PA$^\omega$ *eine Formel A beweist, beweist* WE-HA$^\omega$ *die Formel* A'.

Beweis. Induktion über die Beweisstruktur von A:
Axiome von HA *und Gleichheitsaiome*
Mit 4.4 und Lemma 4.2.(k), (l), (m) erhalten wir $\vdash A' \equiv \neg\neg(B)$ oder $\vdash A \equiv B$ für alle Axiome A, wobei B immer eine Instanz desselben Axioms ist.
Tertium non datur
Die Übersetzung von $A \vee \neg A$ ist mit Lemma 4.4.(c) äquivalent zu $\neg\neg(A \vee \neg A)$, was nach Lemma 4.2.(e) ableitbar ist.
Regeln von WE-HA$^\omega$

(a) Modus Ponens $\dfrac{A \quad A \supset B}{B}$: Nach Induktionshypothese haben wir A' und $(A \supset B)'$. Mit Lemma 4.4.(d) erhalten wir $A' \supset B'$, worauf wir Modus Ponens anwenden können um B' zu schließen.

Syllogismus $\dfrac{A \supset B \quad B \supset C}{A \supset C}$: Wie oben können wir $A' \supset B', B' \supset C'$ folgern und die Syllogismusregel anwenden.

(b) Exportation $\dfrac{A \wedge B \supset C}{A \supset (B \supset C)}$, Importation $\dfrac{A \supset (B \supset C)}{A \wedge B \supset C}$. Wir bemerken wieder, dass die Negationsübersetzung (bis auf intuitionistische Äquivalenz) mit $\supset$ und $\wedge$ kommutiert und wir auf die äquivalenten Formeln die jeweilige Regel anwenden können.

(c) Expansion $\dfrac{A \supset B}{C \vee A \supset C \vee B}$: Die Negationsübersetzung von $(C \vee A) \supset (C \vee B)$ ist mit intuitionistisch äquivalent zu $(C^* \supset A') \supset (C^* \supset B')$. Diese Formel kann mit dem Dedkutionstheorem Satz 2.9 bewiesen werden, da $A' \supset B', C^* \supset A', C* \vdash_H B'$.

(d) Quantorenregeln: $\dfrac{A \supset B}{\exists x A \supset B}$ ist mit der Übersetzung verträglich, da mit Lemma 4.2.(m) $(\exists x A \supset B)' \equiv \neg\neg\exists x A' \supset B' \equiv \exists x A' \supset B$. Diese Formel lässt sich mit (I$\exists$) schließen.

$\dfrac{A \supset B}{A \supset \forall x B}$ bleibt ebenfalls erhalten, da mit (I$\exists$) und dem Deduktionsthorem $\vdash B' \supset \neg\exists x B^*$ und $(\forall x B)' = \neg\exists x B^*$.

Die quantorenfreien Extensionalitätsaxiome sind abgehandelt, da die Übersetzung bis auf Äquivalenz mit $\supset$ kommutiert.
Extensionalitätsregeln höherer Typen $(E_\rho)' \equiv \neg\neg E_\rho$. *Axiome für* S, Π, Σ, R Sind atomar, und daher äquivalent zu ihrer Negationsübersetzung.
Das Induktionsschema
Wir verwenden die nach Korollar 2.12 äquivalente Regel

$$\frac{B(0) \wedge \forall x^0(B(x) \supset B(S(x)))}{\forall x B(x)}.$$

Nach Induktionshypothese haben wir

$$B(0)' \wedge \neg\neg\forall x \neg\neg(B'(x) \supset B'(S(x)))$$

Mit Lemma 4.2.(n) und 4.2.(k) erhalten wir $\neg\neg B'(x) \supset \neg\neg B'(S(x))$. Anwendung der Induktionsregel liefert $(\forall x B(x))'$.

$\square$

4.3 Shoenfields Kombination

Die folgende Funktionalinterpretation wurde am $\neg\vee\forall$-Fragment von J. Shoenfield in [Sho05] eingeführt. Diese Erweiterung beruht auf [SK07]:

Definition 4.6. Die Shoenfield-Interpretation einer Formel A ist induktiv definiert als $A^S = \forall\bar{u}\exists\bar{x}A_S(\bar{u}|\bar{x})$, wobei A_S quantorenfrei ist, wie folgt:

(S1) $P^S \equiv P \equiv P_S$ für Atomformeln P

(S2) $(A \wedge B)^S = \forall z, \bar{x}, \bar{u}\exists\bar{y}, \bar{v}(z = 0 \supset A_S(\bar{x}|\bar{y})) \wedge (z \neq 0 \supset B_S(\bar{u}|\bar{v}))$

(S3) $(A \vee B)^S = \forall\bar{x}, \bar{u}\exists\bar{y}, \bar{v}(A_S(\bar{x}|\bar{y}) \vee B_S(\bar{u}|\bar{v}))$

(S4) $(A \supset B)^S = \forall\bar{X}, \bar{v}\exists\bar{y}, \bar{u}A_S(\bar{y}|\bar{X}(\bar{y})) \supset B_S(\bar{v}|\bar{u})$

(S5) $(\exists zA)^S = \forall\bar{Y}\exists z, \bar{X}A_S(\bar{Y}(z, \bar{X})|\bar{X}(\bar{Y}(z, \bar{X}))|z)$

(S6) $(\forall zA)^S = \forall z, \bar{u}\exists\bar{x}A_S(\bar{u}|\bar{x}|z)$

Bemerkung 4.7. $(\neg A)^S \equiv \forall\bar{F}\exists\bar{u}(\neg A_S(\bar{u}|\bar{F}(\bar{u})))$,

Tatsächlich besteht, wie in [SK07] gezeigt, ein sehr enger Zusammenhang ziwschen der Shoenfield-Interpretation auf der einen, sowie Krivines Negationsübersetzung und Gödels Dialectica-Interpretation auf der anderen Seite. Für die Shoenfield-Interpretation gilt tatsächlich (vgl. [SK07])

Satz 4.8. *Für alle Formeln A gilt in* WE-HA$^\omega$ $A'_D(\bar{f}|\bar{u}) \equiv A_S(\bar{u}|\bar{f}(\bar{u}))$.

Bemerkung 4.9. Dies ist insofern bemerkenswert, da die Shoenfield Übersetzung keine weiteren Negationen einführt. Trotzdem lässt sie sich zerlegen in eine Negationsübersetzung und die Dialectica-Interpretation.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die Aussage für eine Formel A gilt, falls $A^*_D(\bar{u}|\bar{x}) \equiv \neg A_S(\bar{u}|\bar{x})$. Es ist nämlich $(\neg A)^D = \exists\bar{f}\forall\bar{u}(\neg A_D(\bar{u}|\bar{f}(\bar{u})))$, und damit $A'_D = \neg A^*_D(\bar{u}|\bar{f}(\bar{u}))$. Mit Korollar 2.22 gilt dann also

$$(A')_D \equiv \neg\neg A_S(\bar{f}|\bar{u}) \equiv A_S(\bar{f}|\bar{u}).$$

(S1) Gilt mit Korollar 2.22.

(S2) Wir verwenden wieder die Qantorenfreiheit von φ_D bzw φ_S.

$$\begin{aligned}
(A \wedge B)^*_D(z, \bar{x}, \bar{u}|\bar{y}, \bar{v}) &= (A^* \vee B^*)_D(z, \bar{u}, \bar{u}|\bar{y}, \bar{v}) \\
&= (z = 0 \supset A^*_D(\bar{x}|\bar{y})) \wedge (z \neq 0 \supset B^*_D(\bar{u}|\bar{v})) \\
&\equiv (z = 0 \supset \neg A_S(\bar{x}|\bar{y})) \wedge (z \neq 0 \supset \neg B_S(\bar{u}|\bar{v})) \\
&\equiv \neg((z = 0 \wedge A_S(\bar{x}|\bar{y})) \vee (z \neq 0 \wedge \neg B_S(\bar{u}|\bar{v}))) \\
&\equiv \neg((z = 0 \supset A_S(\bar{x}|\bar{y})) \wedge (z \neq 0 \supset B_S(\bar{u}|\bar{v}))) \\
&= \neg(A \wedge B)_S(z, \bar{x}, \bar{u}|\bar{y}, \bar{v})
\end{aligned}$$

(S3)

$$\begin{aligned}
(A \vee B)^*_D(\bar{x}, \bar{u}|\bar{y}, \bar{v}) &= (A^* \wedge B^*)_D(z, \bar{x}, \bar{u}|\bar{y}, \bar{v}) \\
&= (A^*_D(\bar{x}|\bar{y}) \wedge B^*_D(\bar{u}|\bar{v})) \\
&\equiv (\neg A_S(\bar{x}|\bar{y}) \wedge \neg B_S(\bar{u}|\bar{v})) \\
&\equiv \neg(A_S(\bar{x}|\bar{y}) \vee B_S(\bar{u}|\bar{v})) \\
&= \neg(A \vee B)_S(\bar{x}, \bar{u}|\bar{y}, \bar{v})
\end{aligned}$$

(S4) Wir verwenden, dass $(A \supset B)' \equiv A' \supset B'$. Dies ist der Fall, da

$$(A \supset B)' = \neg(A' \wedge B^*), \quad \neg(A' \wedge B^*), A' \vdash_H B', \qquad \text{und somit} \qquad (A \supset B)' \supset (A' \supset B').$$

Die andere Richtung gilt, da $A' \supset B', A' \wedge B^* \vdash \bot$, und somit

$$\begin{aligned}
(A \supset B)'_D(\bar{U}, \bar{Y}|\bar{X}, \bar{v}|) &\equiv (A' \supset B')_D(\bar{U}, \bar{Y}|\bar{X}, \bar{v}|) \\
&= A'_D(\bar{X}|\bar{Y}(\bar{X}, \bar{v})|) \supset B'_D(\bar{U}(\bar{X})|\bar{v}|) \\
&\equiv A_S(\bar{Y}(\bar{X}, \bar{v})|\bar{X}(\bar{Y}(\bar{X}, \bar{v}))|) \supset B_S(\bar{v}|\bar{U}(\bar{X}, \bar{v})|) \\
&= (A \supset S)(\bar{X}, \bar{v}|\bar{Y}(\bar{X}, \bar{v}), \bar{U}(\bar{x}, \bar{v})|)
\end{aligned}$$

(S5)

$$\begin{aligned}
(\exists z A)^*_D(\bar{Y}|z, \bar{X}) &= (\neg \exists z A')_D(\bar{Y}|z, \bar{X}) \\
&\equiv \neg(\exists z A')_D(z, \bar{X}|\bar{Y}(z, \bar{X})) \\
&= \neg A'_D(\bar{X}|\bar{Y}(z, \bar{X})|z) \\
&\equiv \neg A_S(\bar{Y}(z, \bar{X})|\bar{X}(\bar{Y}(z, \bar{X}))|z) \\
&= \neg(\exists z A)_S(\bar{Y}|z, \bar{X})
\end{aligned}$$

(S6) Funktioniert ähnlich wie oben:

$$\begin{aligned}
(\forall z A)^*_D(z, \bar{x}|\bar{y}) &= (\exists z A^*)_D(z, \bar{x}|\bar{y}) \\
&= A^*_D(\bar{x}|\bar{y}|z) \\
&\equiv \neg A_S(\bar{x}|\bar{y}|z) \\
&= \neg(\forall z A)_S(z, \bar{x}|\bar{y})
\end{aligned}$$

□

Wir erhalten daher die Hauptaussage dieser Arbeit:

Korollar 4.10. *Falls* WE-PA$^\omega$ $\vdash$ *A, dann gibt es ein Termtupel $\bar{t}$, sodass* WE-HA$^\omega$ $\vdash \forall \bar{y} A_S(\bar{y}|\bar{t}(\bar{y}))$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
&\text{WE-PA}^\omega \vdash A \\
\Rightarrow\ &\text{WE-HA}^\omega \vdash A' \\
\Rightarrow\ &\text{es existiert } \bar{t}\ \text{WE-HA}^\omega \vdash \forall \bar{y} A'_D(\bar{t}|\bar{y}) \\
\Rightarrow\ &\text{es existiert } \bar{t}\ \text{WE-HA}^\omega \vdash \forall \bar{y} A_S(\bar{y}|\bar{t}(\bar{y}))
\end{aligned}$$

□

Literatur

[Dal13] Dirk van Dalen. *Logic and structure*. eng. 5. ed.. Universitext. London [u.a.]: Springer, 2013. ISBN: 1447145577.

[Göd33] Kurt Gödel. "Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie". de. In: *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* 4 (1933), S. 34–38.

[Koh08] Ulrich Kohlenbach. *Applied proof theory : proof interpretations and their use in mathematics*. eng. Springer monographs in mathematics. Berlin [u.a.]: Springer, 2008. ISBN: 3540775323.

[Kri90] Jean-Louis Krivine. "Opérateurs de mise en mémoire et traduction de Gödel". fre. In: *Archive for mathematical logic* 30.4 (1990), S. 241–267. ISSN: 0933-5846.

[Sho05] Joseph R Shoenfield. *Mathematical logic*. eng. 2. [print.]. Natick, Mass. Urbana, Ill: Peters ASL, Assoc. for Symbolic Logic, 2005. ISBN: 1568811357.

[SK07] Thomas Streicher und Ulrich Kohlenbach. "Shoenfield is Gödel after Krivine". en. In: *MLQ* 53 (2 Apr. 2007), S. 176–179. DOI: `10.1002/malq.200610038`. URL: `http://dx.doi.org/10.1002/malq.200610038`.

[SR98] Thomas Streicher und Bernhard Reus. "Classical logic, continuation semantics and abstract machines". eng. In: *Journal of functional programming* 8.6 (1998), S. 543–572. ISSN: 0956-7968.

[TD88] Anne S Troelstra und Dirk van Dalen. *Constructivism in mathematics : an introduction. 1 (1988)*. ger. Studies in logic and the foundations of mathematics. Amsterdam [u.a.]: North-Holland, 1988. ISBN: 0444702660.

[Tro73] Anne S Troelstra. *Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis*. eng. Lecture notes in mathematics. Berlin [u.a.]: Springer, 1973. ISBN: 0387064915.