



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

B A C H E L O R A R B E I T

Die Kosten eines Zyklus sind ein Quadrat

ausgeführt am

Institut für
Diskrete Mathematik und Geometrie
TU Wien

unter der Anleitung von

Stefan Hetzl

durch

Markus Rinke

Matrikelnummer: 01402581

1220 Wien

Wien, am 23. Juni 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Grundlegende Definitionen und Notation	4
2.1	Der Sequentialkalkül	4
2.2	Der logische Flussgraph	7
3	Zyklen und Reduktion	9
3.1	Einige Eigenschaften von Zyklen in Beweisen	10
3.2	Strukturelle Reduktion und Regularität	12
4	Die Elimination von Zyklen	18
4.1	Strukturelle Hilfsmittel	18
4.2	Beweis des Hauptresultats	21
	Literaturverzeichnis	30

1 Einleitung

Die vorliegende Bachelorarbeit stellt eine eingehende Ausführung des von Alessandra Carbone verfassten Artikel „The cost of a cycle is a square“ (vgl. [1]) dar, welcher 2002 in *The Journal of Symbol Logic*, Vol. 67, erschienen ist.

Der Ausgangspunkt ist hierbei der von Buss (vgl. [4]) eingeführte Begriff des Flussgraphen, der eine von einem Beweis induzierte Graphenstruktur bezeichnet. Wesentlich für Carbone's Belange ist hierin das Auftreten gerichteter Zyklen in \mathcal{LK} -Beweisen. Die Elimination solcher Zyklen ist durch den Gentzenschen Hauptsatz gewährleistet und zieht eine Erhöhung der Beweiskomplexität nach sich. In [3] wurde bereits gezeigt, dass so eine Expansion für \mathcal{LK} -Beweise Sprachen erster Stufe nicht-elementar ist.

Für aussagenlogische \mathcal{LK} -Beweise lässt sich allerdings eine obere Schranke angeben, die nur von der Anzahl der Zeilen und der Anzahl der Zyklen eines Beweises abhängt. Diese Tatsache möchten wir mit dem folgenden Satz exakt fassen. Es gilt:

Theorem 1. *Sei Π ein aussagenlogischer \mathcal{LK} -Beweis mit Endsequent S , k Zeilen und n Zyklen. Dann gibt es einen azyklischen Beweis Π' von S mit $\mathcal{O}(k^{n+1})$ Zeilen.*

Ein Beweis mit n Zyklen kann also in einen azyklischen Beweis überführt werden, der durch ein Polynom vom Grad $\deg n + 1$ beschränkt ist. Insbesondere bedeutet dies, dass die Elimination eines einzelnen Zyklus mit einer quadratischen Erhöhung der Beweiskomplexität einhergeht.

Die Umsetzung der Arbeit sieht so aus. Im folgenden Abschnitt werden wir einerseits die notwendige Terminologie einführen und den Sequentialkalkül in aussagenlogischer Form formulieren, und andererseits den logischen Flussgraphen vorstellen. Im dritten Abschnitt werden wir einige Eigenschaften von Zyklen innerhalb von Beweisen beleuchten und im Anschluss zwei Möglichkeiten präsentieren einen Beweis so zu vereinfachen, dass eine gewisse Regularität vorausgesetzt werden kann. Der letzte Abschnitt widmet sich dem Beweis zweier struktureller Ergebnisse mit deren Hilfe wir Theorem 1 zeigen werden.

2 Grundlegende Definitionen und Notation

Wir werden nun eine aussagenlogische Formulierung des Sequentialkalkül \mathcal{LK} vorstellen. Wie üblich bezeichnen wir mit Großbuchstaben $A, B, C, \dots, A_1, A_2, \dots$ Metavariablen, die sich über Formeln erstrecken und mit $\Gamma, \Delta, \Lambda, \dots, \Gamma_0, \Gamma_1, \dots$ endliche (auch leere) Multimengen von Formeln, in denen Wiederholungen einzelner Formeln zugelassen sind; dabei ist die Reihenfolge der vorkommenden Formeln irrelevant, die Anzahl der Vorkommnisse eines Elements in einer Multimenge hingegen entscheidend.

2.1 Der Sequentialkalkül

Definition 1. Für beliebiges Γ und Δ bezeichnen wir mit $\Gamma \rightarrow \Delta$ ein *Sequent*. Dabei heißt Γ *Antezedens* und Δ *Sukzedens* des Sequent. Γ, Δ nennen wir auch *Sequentformeln*. Unter einem *Axiom* verstehen wir ein Sequent der Form

$$A, \Gamma \rightarrow \Delta, A,$$

wobei A eine Atomformel ist. In Axiomen nennen wir Formeln wie A *ausgezeichnete* Vorkommnisse und Formeln in Γ, Δ auch *schwache* Formeln.

Zur Semantik. Für $m, n \geq 1$ meinen wir mit einem Sequent der Form $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m \rightarrow \Delta_1, \dots, \Delta_n$ den Ausdruck $\Gamma_1 \wedge \dots \wedge \Gamma_m \supset \Delta_1 \vee \dots \vee \Delta_n$. Für $m \geq 1$ und leeres Sukzedens ist $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m \rightarrow \perp$. Für $n \geq 1$ bedeutet der Ausdruck $\rightarrow \Delta_1, \dots, \Delta_n$, dass $\Delta_1 \vee \dots \vee \Delta_n$ gültig ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden wir für unsere weiteren Überlegungen jedoch auf den logischen Junktor \supset verzichten, da dieser einfach aus \vee, \neg gewonnen werden kann. Die Bedeutung von Sequenten überträgt sich dann auf natürliche Weise.

Definition 2. Eine *Inferenz* ist ein Ausdruck der Form

$$\frac{S_1}{S} \quad \text{oder} \quad \frac{S_1 \quad S_2}{S},$$

wobei S_1, S_2 und S Sequente sind. Dabei heißen S_1 und S_2 *Obersequente* resp. *S Untersequente* einer Inferenz. Eine Inferenz entsteht dabei genau durch Anwendung der folgenden Regeln:

1. Strukturelle Regeln:

2 Grundlegende Definitionen und Notation

1.1 Kontraktion:

$$K_l: \frac{A, A, \Gamma \rightarrow \Delta}{A, \Gamma \rightarrow \Delta}; \quad K_r: \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, A}.$$

Wir nennen das Paar A auch *Kontraktionsformeln* dieser Regel.

1.2 Schnitt:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad A, \Pi \rightarrow \Theta}{\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Theta}.$$

Wir nennen A auch die *Schnittformel* dieser Regel.

2. Logische Regeln:

2.1 Negation:

$$\neg_l: \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Delta}; \quad \neg_r: \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg A}.$$

2.2 Konjunktion:

$$\wedge_l: \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad \text{und} \quad \frac{B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \rightarrow \Delta};$$

$$\wedge_r: \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \wedge B}.$$

2.3 Disjunktion:

$$\vee_l: \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Delta};$$

$$\vee_r: \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \vee B} \quad \text{und} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \vee B}.$$

Wir nennen die Formeln in Γ, Δ auch *Nebenformeln* und Formeln A, B in den Obersequenten auch *Hilfsformeln*. Die Formel, die durch Anwendung einer Regel auf Hilfsformeln hervorgeht, bezeichnen wir als *Hauptformel*. Man beachte, dass die Schnittregel keine Hauptformel liefert.

Bemerkung 1. Normalerweise wird der Sequentialkalkül mit zwei zusätzlichen strukturellen Regeln, der Vertauschungsregel und der Abschwächungsregel, definiert. Der hier vorgestellte Zugang ermöglicht es uns jedoch von diesen abzusehen, zumal wir Sequente über Multimengen definiert haben und somit das Permutieren der Positionen von Atomformeln überflüssig wird, und darüberhinaus unsere Definition der Axiome bereits für die Einführung abschwächender Formeln, i.e. Abschwächungsregel, aufkommt.

Bemerkung 2. Wir haben zuvor schon bemerkt, dass sich \supset stets aus \neg und \vee gewinnen lässt. Dazu ersetze man einfach \supset_l durch \neg_l und \vee_l und für \supset_r geht man analog vor. Es bleibt zu erwähnen, dass wir an keiner Stelle neue Kontraktionen einführen und keine Schnitte, Kontraktionen oder Axiome entfernt werden. Transformationen eines Beweises Π auf einen Beweis Π' ohne dem Junktor \supset erhalten demnach die Beweisstruktur, weshalb wir unsere eingangs gesetzte Vereinbarung gerechtfertigt finden.

2 Grundlegende Definitionen und Notation

Notation 1. Für eine Formel A und eine in A vorkommende Subformel B schreiben wir $A[B]$. Man bemerke, dass dabei B auch A selbst sein kann.

Definition 3. Ein *Beweis* Π in \mathcal{LK} , oder \mathcal{LK} -*Beweis*, ist ein Baum aus Sequenten, der folgende Bedingungen erfüllt:

- Die obersten Sequenten von Π sind Axiome (diese Sequenten stellen die Blätter des Baumes dar);
- Jedes Sequent in Π , ausgenommen das Unterste, ist ein Obersequent von einer Inferenz, deren Untersequent ebenfalls in Π ist (diese Sequenten stellen die inneren Knoten des Baumes dar).

Das letzte Sequent von Π bezeichnen wir als *Endsequent* von Π .

Definition 4. Ein Sequent S ist *beweisbar* (in \mathcal{LK}) oder auch \mathcal{LK} -*beweisbar*, wenn es einen \mathcal{LK} -Beweis von S gibt. Ein Beweis ohne Schnittregel heißt *schnittfrei*.

Ein fundamentales Resultat in diesem Zusammenhang stellt der Gentzensche Hauptsatz dar, laut dem sich jeder \mathcal{LK} -Beweis in einen schnittfreien \mathcal{LK} -Beweis überführen lässt. Es gilt:

Theorem 2 (Der Gentzensche Hauptsatz, 1935). *Sei S ein Sequent und Π ein \mathcal{LK} -Beweis von S . Dann existiert ein Beweis Π' von S , der schnittfrei ist.*

Beweis. Ein Beweis wird in [7] erbracht. ←

Wir werden in unseren Untersuchungen mehrfach von diesem Resultat Gebrauch machen. Eine Beobachtung die wir an dieser Stelle erwähnen möchten ist, dass der schnittfreie Beweis unter Umständen weitaus länger als der Ursprüngliche ist. Wir werden nun noch eine entsprechende Notation zur Kennzeichnung der Komplexität eines Beweises angeben.

Definition 5. Die *Länge einer Formel* A , in Zeichen $|A|$, ist die Anzahl der in ihr auftretenden Symbole. Entsprechend ist die *Länge* $|S|$ eines Sequents S , die Summe der Längen der in ihm auftretenden Formeln. Die *Länge* $|\Pi|$ eines Beweises Π ist die Summe der Längen der Sequenten in Π .

Notation 2. Für die Anzahl der Axiomen und Regeln in einem Beweis Π schreiben wir $\#\text{lines}(\Pi)$. Für die Anzahl der Axiome und Regeln ohne Kontraktion schreiben wir $N(\Pi)$.

Bemerkung 3. Für einen Beweis Π ist unmittelbar klar, dass $N(\Pi) \leq \#\text{lines}(\Pi)$ gilt.

Definition 6. Die *logische Komplexität* $d(A)$ einer Formel A ist ihre logische Tiefe. Das heißt, $d(A) := 0$, falls A eine Atomformel ist, $d(A \wedge B) = d(A \vee B) := \max\{d(A), d(B)\} + 1$ und $d(\neg A) := d(A) + 1$.

2.2 Der logische Flussgraph

Jeder Beweis in \mathcal{LK} kann mit einem orientierten Graphen assoziiert werden, i.e. jeder \mathcal{LK} -Beweis induziert über seine atomaren Vorkommnisse eine logische Flussrichtung des Beweisherganges. Die Idee geht auf Buss zurück und entsprechend kann [4] für Details herangezogen werden. Wir werden nun eine formale Definition dieser Konzeption vorstellen.

Definition 7. Sei Π ein \mathcal{LK} -Beweis und A eine Subformel einer Formel in Π und sei B eine Formel in Π . Dann bezeichnen wir ein Vorkommnis A' in A als eine *s-Formel* und zwei verschiedene Vorkommnisse derselben Formel B in Π als *Varianten*.

Es lohnt sich an dieser Stelle festzuhalten, dass eine Subformel A einer Formel, im Gegensatz zu einer *s-Formel*, mehrfach in einem Beweis auftreten kann.

Notation 3. Sprechen wir von Varianten einer Formel B , so kennzeichnen wir diese durch Superskripte, i.e. B^i, B^j .

Definition 8. Sei Π ein \mathcal{LK} -Beweis und A eine *s-Formel* in Π . Wir sagen, dass A *positiv* in Π vorkommt, genau dann wenn A positiv als Unterformel einer Formel im Sukzedens oder negativ als Unterformel einer Formel im Antezedens eines Sequents in Π vorkommt. A kommt *negativ* in Π vor, wenn A nicht positiv in Π vorkommt.

Definition 9. Sei Π ein \mathcal{LK} -Beweis. Der *logische Flussgraph* G_Π von Π ist über die Menge seiner Knoten und Kanten definiert. Dabei ist die *Knotenmenge* die Menge aller Vorkommnisse von Formeln in Π und die *Kantenmenge* ist definiert wie folgt:

1. Für jedes Axiom gibt es eine Kante, die *Axiomenkante*, vom ausgezeichneten Vorkommnis im Antezedens des Axioms zum ausgezeichneten Vorkommnis im Sukzedens.
2. Für jede logische oder strukturelle Regel und jede Nebenformel A im Antezedens Γ eines Obersequents gibt es eine Kante vom zu A entsprechenden Nebenformel von Γ im Untersequent nach A und für jede Nebenformel B im Sukzedens Δ eines Obersequents gibt es eine Kante von B zu der zu B entsprechenden Nebenformel in Δ im Untersequent.
3. Für jede logische Regel oder in einer Kontraktionsregel gibt es für eine Hilfsformel A im Sukzedens des Obersequents eine Kante von A zur entsprechenden *s-Formel* im Untersequent. Ist A eine Hilfsformel im Antezedens eines Obersequents, so gibt es eine Kante nach A von der entsprechenden Hilfsformel im Untersequent.
4. Bei einem Schnitt gibt es eine Kante, die *Schnittkante*, von der Schnittformel A im Sukzedens des linken Obersequents zum rechten Vorkommnis von A im Antezedens des rechten Obersequents.

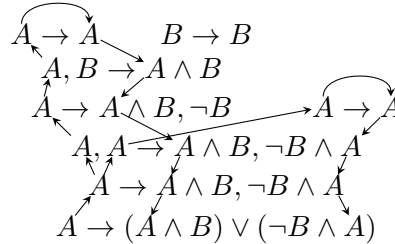
2 Grundlegende Definitionen und Notation

5. Falls es eine Kante von einer s -Formel A^1 zu einer s -Formel A^2 gibt und B^1 eine Subformel von A^1 ist, so gibt es eine Kante von B^1 zu der zu B^1 entsprechenden Subformel B^2 von A^2 , im Fall, dass B^1 positiv in A^1 vorkommt. Sonst gibt es eine Kante von B^2 nach B^1 .

Die Idee lässt sich am besten anhand eines Beispiels veranschaulichen:

Beispiel 1.

$$\frac{\frac{\frac{A \rightarrow A \quad B \rightarrow B}{A, B \rightarrow A \wedge B}}{A \rightarrow A \wedge B, \neg B} \quad A \rightarrow A}{\frac{A, A \rightarrow A \wedge B, \neg B \wedge A}{A \rightarrow A \wedge B, \neg B \wedge A}}{A \rightarrow (A \wedge B) \vee (\neg B \wedge A)}$$

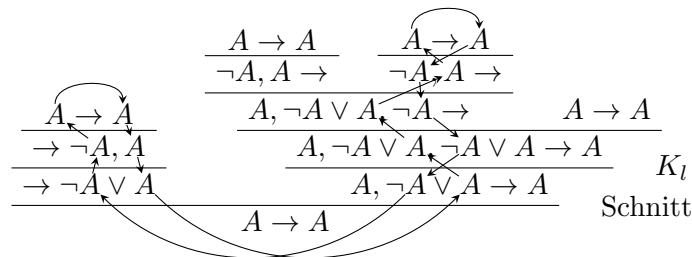


Damit ist ersichtlich, dass der logische Flussgraph die natürliche Gerichtetheit des Beweisherganges aufzeigt. Negative Vorkommnisse in einem Sequent sind solche, die eine Kante nach oben haben. Analog sind positive Vorkommnisse solche, die eine Kante nach unten haben. Die Verbindung der negativen Vorkommnisse zu den positiven Vorkommnissen ist durch Axiome gegeben, wohingegen die Verbindung der positiven zu den negativen Vorkommnissen durch Schnitte erfolgt. Hernach unterscheiden wir also vier Arten von Kanten:

1. nach oben gerichtete Kanten, die negative Vorkommnisse verbinden;
2. nach unten gerichtete Kanten, die positive Vorkommnisse verbinden;
3. Kanten zwischen Axiomen, die negative mit positiven Vorkommnissen verbinden;
4. Kanten bei Schnitten, die positive mit negativen Vorkommnissen verbinden;

Diese Beobachtungen werden durch das nachstehende Beispiel illustriert :

Beispiel 2.



Definition 10. Eine *Zyklus* ist eine geschlossene Folge von Kanten innerhalb eines logischen Flussgraphen, d.h. für den ersten Knoten v_1 und den letzten Knoten v_n gilt $v_1 = v_n$. Zudem nennen wir einen Zyklus *einfach*, wenn jeder Knoten des Graphen genau eine eingehende Kante und genau eine ausgehende Kante hat.

Dass Schnitte nicht zufällig mit der Existenz von Zyklen korrelieren zeigt der Zugang von der anderen Richtung.

Theorem 3. Sei Π ein schnittfreier Beweis. Dann ist der Flussgraph G_Π azyklisch.

Beweis. Ein Beweis kann in [2] nachgelesen werden. ←

Zum Abschluss dieses Abschnitts möchten wir noch nützlich Begriffe einführen, die an späterer Stelle aufgegriffen werden:

Definition 11. Sei Π ein Beweis und S das Endsequent von Π . Eine Folge von Kanten im Flussgraphen G_Π von Π bezeichnen wir als *logischen Pfad*. Eine *Brücke* ist ein logischer Pfad, der bei einem negativen Vorkommnis im Endsequent S beginnt und in einem positiven Vorkommnis in S endet (oder äquivalent dazu, ein Pfad, der zwei verschiedene s -Formeln im Endsequent verbindet). Anfangs- und Endknoten einer Brücke heißen *Extreme* der Brücke.

Definition 12. Ein logischer Pfad ist *direkt*, wenn er zwei Vorkommnisse verbindet und dabei keine Axiomenkante oder Schnittkante enthält.

Man überzeugt sich leicht, dass ein logischer Pfad genau dann direkt ist, wenn er nur positive oder nur negative Vorkommnisse enthält. Somit sind logische Pfade solche, die hinauf zu Axiomen, oder hinab zum Endsequent beziehungsweise zur Schnittformel verlaufen. Die Existenz von Kontraktionen ermöglicht das gleichzeitige Vorhandensein mehrerer direkter Pfade von einem Vorkommnis zu Axiomen in Π .

Definition 13. Eine Formel in einem Beweis Π , deren direkte Pfade von oder zu schwachen Formeln in Axiomen verlaufen, heißt *schwaches Vorkommnis*.

3 Zyklen und Reduktion

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Erwähnung eines wichtigen Resultats, das den Zusammenhang von Zyklen und Kontraktionen sichtbar macht. Wir haben bereits festgestellt, dass der Flussgraph eines Beweises azyklisch ist, falls dieser schnittfrei ist. Es

3 Zyklen und Reduktion

gilt aber auch:

Theorem 4. *Sei Π ein Beweis, der keine Kontraktionen enthält (möglicherweise nicht schnittfrei). Dann ist der Flussgraph G_Π azyklisch.*

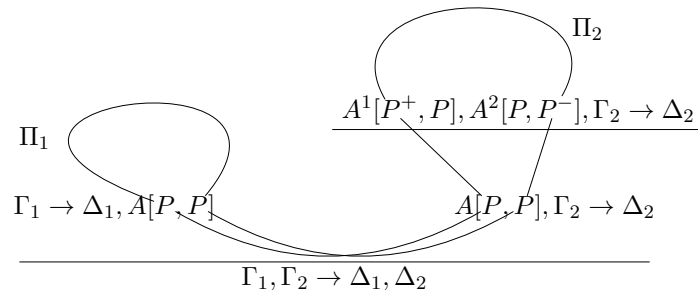
Beweis. Ein Beweis wird in [2] erbracht. ←

Offensichtlich ist das gemeinsame Auftreten von Schnitten und Kontraktionen ausschlaggebend für die Komplexität des logischen Flussgraphen eines Beweises. Dies motiviert die genauere Untersuchung des Zusammenspiels von Zyklen und deren Auftreten in Verbindung mit Schnitten und Kontraktionen. Dieser Abschnitt wird sich nun der Vorstellung einiger Eigenschaften zyklischer Pfade widmen, wobei wir für den Großteil der Beweise [2] und [3] zitieren werden.

Als Generalvoraussetzung für alle weiteren Abschnitte werden wir fortan einen Zyklus stets als einen orientieren Zyklus auffassen und die Gerichtetheit des Graphen nicht mehr explizit einzeichnen.

3.1 Einige Eigenschaften von Zyklen in Beweisen

Es lohnt sich an dieser Stelle anzumerken, dass sich ein Zyklus stets durch Anwendung der Schnittelimination wegschaffen lässt. Dazu betrachten wir den folgenden Beweis Π als Beispiel:

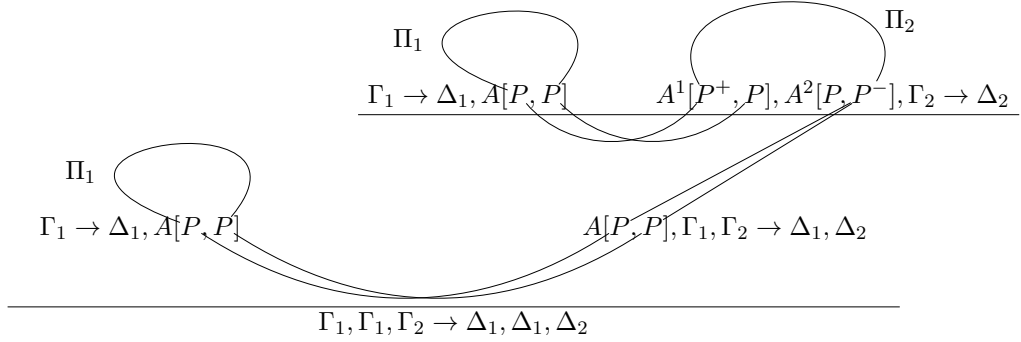


Dabei sind P^+ und P^- atomare Vorkommnisse in P , die positiv und negativ innerhalb der Vorkommnisse A^1 und A^2 , respektive, auftreten².

Es verlaufe ein Pfad von P^+ nach P^- im Teilbeweis Π_2 . Darüber hinaus verlaufe ein Pfad von P^+ über Kontraktion und Schnitt nach Π_1 , über die Axiom wieder hinab ins Endsequent von Π_1 , und über Schnitt und Kontraktion, wieder hinauf, nach P^- in A^2 . Dann betrachten wir folgende Transformation von Π in einen Beweis Π' :

²Beispielsweise seien A^1 und A^2 von der Form $S \vee \neg S$, wobei P^+ und P^- zu zwei verschiedenen Vorkommnissen von S gehören

3 Zyklen und Reduktion



In Π' haben wir eine Kopie von Π_1 direkt über dem Schnitt. Der Unterschied ist nun, dass der Pfad, ausgehend von P^+ in A^1 trotz seines Flusses nach Π_1 keine Möglichkeit mehr hat, nach A^2 gelangen.

Theorem 5. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dann gibt es einen \mathcal{LK} -Beweis mit n einfachen Zyklen, der die Schnittregel genau ein mal verwendet.

Beweis. Der Beweis basiert auf der Korrespondenz zu Church-Numeralen und befindet sich in [1] bzw. [2]. \dashv

Ein wichtige Beobachtung ist, dass die Anzahl der Zyklen innerhalb eines Beweises nicht von der Anzahl der durchgeführten Schnitte abhängt, sondern lediglich von der Anzahl der Axiome. Wir explizieren dies im nachstehenden Satz:

Theorem 6. Sei Π ein Beweis mit Endsequent S und $n \geq 1$ Schnitten. Dann gibt es einen Beweis Π' mit dem selben Endsequent S und nur einem Schnitt.

Beweis. Sei also n die Anzahl der Schnitte in Π , mit Endsequent $\Gamma \rightarrow \Delta$, und seien A_1, \dots, A_n die zu den Schnitten gehörenden Schnittformeln. Wir überführen den Beweis von Π in einen Beweis Π' wie folgt: Für jede Schnittformel A_i im Sukzedens des linken Obersequents wenden wir \neg_l auf A_i an, gefolgt von einem \vee_l . So erhalten wir für jeden Schnitt eine Formel der Form $\neg A_i \vee A_i$. Es ergibt sich ein schnittfreier Beweis des Sequents $\neg A_1 \vee A_1, \dots, \neg A_n \vee A_n, \Gamma \rightarrow \Delta$, der die gleiche Anzahl an Zeilen wie Π hat. Nun wenden auf dieses Sequent n -mal \wedge_l an und erhalten

$$(\neg A_1 \vee A_1) \wedge \dots \wedge (\neg A_n \vee A_n), \Gamma \rightarrow \Delta.$$

Unter mehrfacher Anwendung von \wedge_r auf die Tautologie der Form $\neg B \vee B$, erhalten wir in $\mathcal{O}(n)$ Schritten zusätzlich das Sequent

$$\rightarrow (\neg A_1 \vee A_1) \wedge \dots \wedge (\neg A_n \vee A_n),$$

ohne Verwendung von Kontraktion. Ein Schnitt, durchgeführt auf beide Sequente, bringt uns auf $\Gamma \rightarrow \Delta$. Der Beweis Π' begnügt sich also mit nur einem Schnitt und hat das Endsequent $\Gamma \rightarrow \Delta$. \dashv

3 Zyklen und Reduktion

In gewissem Sinne bleibt also die 'topologische Struktur' des Flussgraphen Π im neuen Beweis Π' erhalten, d.h. es werden keine neuen Kontraktionen eingeführt und die bereits in Π vorhandenen Kontraktionen bleiben bestehen.

Definition 14. Eine Kontraktion liegt *oberhalb* eines Schnitts, wenn es einen direkten Pfad zwischen der Kontraktionsformel und einer Schnittformel des Schnitts gibt.

Theorem 7. Sei Π ein Beweis, in dem keine Kontraktion oberhalb eines Schnitts liegt. Dann ist der logische Flussgraph G_Π azyklisch.

Um den Satz zu zeigen, stellen wir noch einen weiteren Begriff vor und führen eine Hilfsaussage an:

Definition 15. Wir nennen einen Schnitt *harmlos*, wenn er eine schwache Schnittformel hat.

Lemma 1. Ist ein Schnitt harmlos, so verlaufen durch ihn keine Zyklen.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass Pfade mit einer schwachen Schnittformel als Knoten, entweder zu oder von schwachen Vorkommnissen in Axiomen verlaufen. Jedoch stellen schwache Vorkommnisse in Axiomen stets Anfangs- oder Endknoten eines Pfades dar, zumal Axiomenkanten nur ausgezeichnete Vorkommnisse A in $A, \Gamma \rightarrow \Delta, A$ verbinden. Mithin sind solche Pfade also nicht zyklisch. \dashv

Beweis von Theorem 7. Das Ziel ist es, alle Schnitte in Π , bis auf solche die harmlos sind, zu entfernen. Der Beweis erfolgt somit durch Anwendung der Schnittelimination nach Gentzen. Da nun nach Voraussetzungen auch keine Kontraktionen oberhalb von Schnitten vorkommen, besteht das Verfahren also nur darin, die logische Komplexität $d(A_i)$ der Schnittformeln A_i zu reduzieren, dem Permutieren von Schnitten und dem Entfernen atomarer Schnittformeln in Axiomen $A, \Gamma \rightarrow \Delta, A$. Insbesondere werden dabei keine neuen Kontraktionen durchgeführt und Teilbeweise Π_i von Π werden weder kopiert noch entfernt (man beachte, dass nur bei harmlosen Schnitten auch der korrespondierende Teilbeweis betroffen ist). Somit bleibt auch die 'topologische Struktur' des Flussgraphen erhalten.

Angenommen Π enthält einen Zyklus. Aufgrund unserer Überlegungen wird so ein Zyklus bei Anwendung der beschriebenen Methode nicht gebrochen. Weil ein Zyklus aber immer durch einen Schnitt verlaufen muss, wir aber alle, bis auf harmlose, eliminiert haben, bedeutet dies, dass der Zyklus durch einen harmlosen Schnitt verläuft, was jedoch wegen Lemma 1 nicht möglich ist. Dies ist ein Widerspruch. \dashv

3.2 Strukturelle Reduktion und Regularität

Wir werden nun zwei Möglichkeiten der Beweistransformation vorstellen, die eine gewisse Regularität für den Beweis unseres Hauptresultats sichern werden. Damit meinen wir

3 Zyklen und Reduktion

konkret eine Überführung eines Beweises Π in einen Beweis Π' , der einerseits das selbe Endsequent beweist, aber andererseits eine leichter handzuhabenden Struktur aufweist. Wir stellen nun die erste Möglichkeit vor:

Definition 16. Ein Beweis Π heißt *reduziert*, wenn er die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Es wird keine zweistellige Regel auf eine schwache Hilfsformel in Π und keine einstellige Regel auf zwei schwache Hilfsformeln in Π angewandt. Außerdem wird keine Kontraktion auf eine schwache Hilfsformel angewandt.
2. Es gibt kein schwaches Vorkommen einer Formel in einer Schnittformel in Π .

Ein Beweis heißt *lokal reduziert*, wenn er die erste Bedingung erfüllt. Entsprechend heißt ein Beweis *global reduziert*, wenn er die zweite Bedingung erfüllt.

Ein äußerst einfaches Beispiel für einen reduzierten Beweis liefert der folgende Beweis:

Beispiel 3.

$$\frac{\frac{A \rightarrow A}{\rightarrow A, \neg A}}{\rightarrow A \vee \neg A}$$

Ebenso lassen sich auch Beispiele finden, für Beweise, die nicht reduziert sind. Wir führen zwei davon an:

Beispiel 4.

$$\neg_l \frac{\frac{A \rightarrow A}{\rightarrow \neg A, A} \quad B \rightarrow B, A}{B \rightarrow B, A \wedge \neg A, A} \wedge_r$$

Dieser Beweis ist nicht reduziert, da die erste Bedingung verletzt ist: \wedge_r wird angewandt auf die Sequente $\rightarrow \neg A, A$ und $B \rightarrow B, A$, wobei die Hilfsformel A in letzterem Sequent nur schwach vorkommt.

Beispiel 5.

$$\frac{\frac{A \rightarrow A \quad \frac{B, C \rightarrow B}{C \wedge B \rightarrow B}}{(C \wedge B), A \rightarrow A \wedge B} \quad \frac{A, B \rightarrow B}{A \wedge B \rightarrow B}}{(C \wedge B) \wedge A \rightarrow A \wedge B} \quad \frac{A \wedge B \rightarrow B}{(C \wedge B) \wedge A \rightarrow B}$$

Dieser Beweis ist nicht reduziert, da die zweite Bedingung verletzt ist: Die Formel A kommt in der Schnittformel $A \wedge B$ des Sequents $A \wedge B \rightarrow A$ schwach vor.

3 Zyklen und Reduktion

Als nächstes werden wir zeigen, dass es für unsere weiteren Untersuchungen ausreicht, wenn wir uns o.B.d.A nur mit reduzierten Beweise Π befassen.

Theorem 8. *Sei Π ein Beweis mit Endsequent S und k Zeilen. Dann gibt es eine Transformation von Π in einen Beweis Π' mit Endsequent S , der reduziert ist und höchstens k Zeilen hat. Ist außerdem Π schnittfrei, so ist auch Π' schnittfrei.*

Beweis. In Lemma 3.2 in [2] wurde bereits gezeigt, dass ein (schnittfreier) Beweis Π stets zu einem (schnittfreien) Beweis Π' transformiert werden kann, der die lokale Bedingung erfüllt. Ebenso wurde in [2], Lemma 3.11, gezeigt, dass eine Transformation für die globale Bedingung durchgeführt werden kann. In beiden Verfahren wird in jedem Transformationschritt entweder Anzahl der Symbole oder die Anzahl der Zeilen im Übergangsbeweis reduziert. Damit folgt die Aussage durch sukzessives Anwenden beider Verfahren, bis sowohl die lokale, als auch die globale Bedingung im neuen Beweis Π' erfüllt sind. \dashv

Die nächsten beiden Ergebnisse liefern eine obere Schranke für die Anzahl von Kontraktionen beziehungsweise Schnitten in Beweisen und wurden bereits in [3] resp. [2] gezeigt.

Theorem 9. *Sei Π ein reduzierter Beweis mit Endsequent S . Es bezeichne $c \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Kontraktionen und $a \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Axiome in Π . Dann gilt $a \geq \frac{c}{2}$.*

Beweis. Ein Beweis kann in [3] nachgelesen werden. \dashv

Theorem 10. *Sei Π ein reduzierter Beweis mit Endsequent S und k Zeilen. Dann gibt es einen reduzierten Beweis Π' mit Endsequent S , der höchstens k Zeilen hat und für alle Schnittformeln $C_i \in \Pi'$ gilt: $|C_i| \leq 2 \cdot k$.*

Beweis. Ein Beweis kann in Lemma 3.12 in [2] nachgelesen werden. \dashv

Bevor wir das nächste Resultat vorstellen werden wir uns eine wesentliche Eigenschaft schnittfreier Beweise in Erinnerung rufen: Jede Formel in einem Obersequent eines Beweises ist eine Subformel einer Formel, die im Untersequent vorkommt (Subformeleigenschaft, vgl. z.B. [5], S. 29).

Theorem 11. *Sei Π ein reduzierter, schnittfreier Beweis mit Endsequent S und $|S| = n$. Hat Π $2^{\mathcal{O}(n)}$ Sequenten, dann gibt es ein Paar atomarer Vorkommnisse B^1, B^2 in S , sodass der Flussgraph G_Π $2^{\mathcal{O}(n)}$ Pfade hat, für die jeweils B^1 ein Anfangsknoten und B^2 ein Endknoten ist.*

Beweis. Wegen $|S| = n$ ist auch die Anzahl der verschiedenen Subformeln in S durch n beschränkt. Wegen der Subformeleigenschaft gilt für alle Formeln in Π , dass sie als Teilformeln einer Formel in S auftreten und weil Π $2^{\mathcal{O}(n)}$ Sequenten hat, gibt es exponentiell viele Hauptformeln in Π die als Subformeln in S auftreten. Diese Formeln können

3 Zyklen und Reduktion

mit exponentiell vielen Kontraktionen assoziiert werden. Sei also c die Anzahl dieser Kontraktionen. Mit Theorem 9, denn Π ist reduziert, folgt für die Anzahl der Axiome a , dass $a \geq c/2$. Also gibt es exponentiell viele Axiome.

Nun gilt, dass Pfade in G_Π von negativen Vorkommnissen von Formeln in S über Axiome zu positiven Vorkommnissen von Formeln in S verlaufen. Da es $\mathcal{O}(n^2)$ solcher negativ-positiv Paare an Vorkommnissen gibt, muss es mindestens ein solches Paar, (B_1, B_2) , geben, dass mit exponentiell vielen Pfaden korrespondiert. \dashv

Wir werden nun die zweite Möglichkeit einer Beweisreduktion vorstellen. Die Idee stellt eine gewisse Regularität des Beweises bezüglich seiner Kontraktionsformeln vor:

Definition 17. Ein Beweis Π heißt *getrennt*, wenn für alle Paare nicht-schwacher Kontraktionsformeln C^1, C^2 in Π und für alle Paare direkte Pfade v^1, v^2 von (zu) C_1, C_2 , respektive, gilt: Es gibt eine zweistellige Regel, angewandt auf Teilbeweise Π_1 mit Endsequent $C, \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1$ ($\Gamma_1 \rightarrow \Delta_1, C$) und Π_2 mit Endsequent $C, \Gamma_2 \rightarrow \Delta_2$ ($\Gamma_2 \rightarrow \Delta_2, C$), sodass das Vorkommnis C in Π_i eine Variante von v^i , $i = 1, 2$ ist. Wir nennen die Beweise Π_i *getrennte Teilbeweise* für C . Die dabei verwendete zweistellige Regel wird in diesem Zusammen mit R bezeichnet und fortan *Trennungsregel* genannt.

Ein Beweis Π ist folglich getrennt, wenn alle Paare direkter Pfade von nicht-schwachen Kontraktionsformeln solange 'nebeneinander herlaufen', bis sie von einer zweistelligen Regeln getrennt werden. Dass diese Bezeichnung nicht nur eine zufällige Erscheinung in bestimmten Beweisen darstellt, sondern für beliebige aussagenlogisch \mathcal{LK} -Beweise umgesetzt werden kann, halten wir mit dem nachstehenden Satz fest:

Theorem 12. Sei Π ein aussagenlogischer \mathcal{LK} -Beweis mit k Zeilen und Endsequent S . Dann gibt es einen getrennten Beweis Π' mit Endsequent S und höchstens k Zeilen.

Beweis. Ein Beweis kann in Proposition 4.18 [2] nachgelesen werden. \dashv

Die Aussage des Beweises ermöglicht es uns insbesondere o.B.d.A nur getrennte Beweise zu betrachten, da zu gegebenen Beweis Π stets ein effektive Transformation durchgeführt werden.

Beispiel 6. Ein Beispiel für einen getrennten Beweis Π liefert

$$\frac{\frac{\frac{A \rightarrow A}{A, \neg A \rightarrow} \quad B \rightarrow B}{A \vee B, \neg A \rightarrow B} \quad \frac{A \rightarrow A \quad \frac{B \rightarrow B}{B, \neg B \rightarrow}}{A \vee B, \neg B \rightarrow A}}{\frac{A \vee B, A \vee B, \neg A \vee \neg B \rightarrow B, A}{A \vee B, \neg A \vee \neg B \rightarrow B, A} C_l}$$

mit zweistelliger Regel \vee_l als Trennungsregel und getrennten Teilbeweisen Π_A, Π_B für $A \vee B$:

3 Zyklen und Reduktion

$$\frac{\frac{A \rightarrow A, B}{A, \neg A \rightarrow B} \quad A, \neg B \rightarrow A}{\frac{A, A, \neg A \vee \neg B \rightarrow A, B}{A, \neg A \vee \neg B \rightarrow A, B} C_l} \quad \frac{\frac{B \rightarrow B, A}{B, \neg B \rightarrow A} \quad B, \neg A \rightarrow B}{\frac{B, B \neg A \vee \neg B \rightarrow A, B}{B, \neg A \vee \neg B \rightarrow A, B} C_l}$$

Definition 18. Sei S ein Sequent und A eine Formel in S . Wir nennen zwei Vorkommnisse in A *stark verknüpft*, falls die minimale Subformel in S , die beide Vorkommnisse enthält, entweder positiv in S mit Hauptjunktoren \wedge , oder negativ in S mit Hauptjunktoren \vee , vorkommt. Wir nennen sie *schwach verknüpft*, wenn die minimale Subformel in S entweder positiv in S mit Hauptjunktoren \vee vorkommt, oder negativ, mit Hauptjunktoren \wedge .

Lemma 2. Sei Π ein getrennter Beweis mit Endsequent S und A eine Formel in S . Dann gibt es kein Paar an Vorkommnissen A^1, A^2 in A , die stark verknüpft sind und durch einen logischen Pfad von A^1 zu einem Axiom und von diesem über einen direkten Pfad nach A^2 verbunden sind.

Beweis. Alle Paare an Pfaden v^{i_1}, v^{i_2} , die zwei stark verknüpfte Vorkommnisse A^{i_1}, A^{i_2} so miteinander verbinden, verlaufen nach Definition 17 in die entsprechenden getrennten Teilbeweise. Eine Ausnahme bilden jedoch die Paar an Vorkommnissen, die in schwachen Formeln auftreten. In diesem Fall gibt es jedoch auch keine Pfade, die diese Paare verbinden und alles ist gut. \dashv

Als Konsequenz dieses Lemmas möchten wir noch eine weitere Hilfsaussage vorstellen und nützliche Terminologie einführen, die uns einen besseren Überblick für die Struktur von Zyklen in Beweisen ermöglicht:

Lemma 3. Sei Π ein Beweis, der einen einfachen Zyklus enthält. Dann ist die letzte Regel durch die der Zyklus verläuft ein Schnitt. Darüber hinaus enthält jede Schnittformel in diesem Schnitt ein Paar ausgezeichneter Vorkommnisse, die durch einen Pfad v in Π verbunden sind und v ist ein Teil vom Zyklus.

Bemerkung 4. Einen Schnitt im Sinne von Lemma 3 nennen wir auch *speziellen Schnitt*.

Beweis von Lemma 3. Wir betrachten den minimalen Teilbeweis Π' von Π , der den Zyklus enthält, d.h. den Beweis, dessen Endsequent durch einen speziellen Schnitt entsteht. Aufgrund der Minimalität enthält das Endsequent von Π' keine Kanten des zyklischen Pfades.

Erreicht ein zyklische Pfad das Obersequent der Schnittregel, so verläuft dieser durch die Schnittformel des Schnitts und fließt nach oben in Richtung der Axiome. Würde so ein Pfad dies nicht tun, so verläuft er ins Endsequent, was jedoch im Widerspruch zur Minimalität von Π' steht. Bei den Axiomen entsteht wieder ein Abwärtsfluss in Richtung der Schnittformel, um den Zyklus zu schließen. Daher gibt es ein Paar von

3 Zyklen und Reduktion

Vorkommnissen, die in einer der Schnittformeln der letzten Regel von Π' liegen und durch einen logischen Pfad v verbunden sind, der Teil des Zyklus ist.

Im Fall, dass Π' gleich Π ist, endet der zyklische im Endsequent von Π , was allerdings im Widerspruch zur Zyklizität des Pfades steht. \dashv

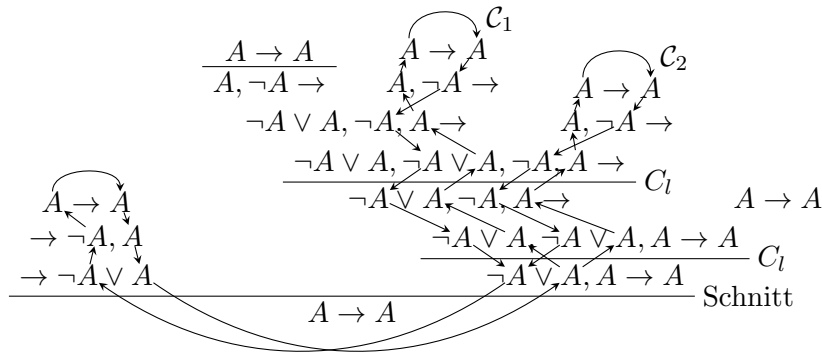
Es kann sein, dass ein Zyklus mehrere Male seinen speziellen Schnitt passiert. Dies führt zur Entstehung mehrere Zyklen, die, anschaulich gesprochen, mehrere ineinander verwobene Schlaufen bilden, und dennoch derselben Menge an Schnittkanten zugrunde liegen. Wir werden diese Beobachtung nun exaktifizieren:

Definition 19. Sei \mathcal{C} ein einfacher Zyklus im Flussgraphen G_Π von einem Beweis Π . Dann nennen wir die Menge der Schnittkanten von \mathcal{C} , die dem speziellen Schnitt von \mathcal{C} angehören, die *spezielle Menge* \mathcal{S} von \mathcal{C} .

Bemerkung 5. Aus Lemma 3 ergibt sich unmittelbar, dass für die Mächtigkeit der speziellen Menge gilt: $|\mathcal{S}| \geq 2$. Hierin liegt eine fundamentale Eigenschaft zur Elimination eines Zyklus, zumal dieser von mindestens zwei Vorkommnissen in der zugehörigen Schnittformel abhängt. Gelingt es uns somit für die spezielle Menge $|\mathcal{S}| = 1$ zu erreichen, kann es die zugehörigen Zyklen nicht mehr geben.

Definition 20. Es seien G_Π der Flussgraph von einem Beweis Π und $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ zwei einfache Zyklen in G_Π . Dann nennen wir $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ *verschachtelte Zyklen*, falls sie die selbe spezielle Menge haben.

Beispiel 7. Im nachstehenden Beweis sind die einfachen Zyklen $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ verschachtelt:



Offensichtlich stimmen die speziellen Mengen von $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ überein, da sie genau aus den beiden Kanten entstehen, die vom speziellen Schnitt induziert werden.

Wir werden, bevor wir uns dem letzten, und eigentlichen, Abschnitt zuwenden, noch einige erwähnenswerte Beobachtungen vorstellen. Es gibt Beweise, die reduziert, jedoch nicht-getrennt sind. So ein Beweis ist in Beispiel 2 zu sehen. Die Existenz von Beweises, die getrennt, jedoch nicht reduziert sind, lässt sich ebenfalls ohne Mühe einsehen.

So kann man in einem jeden getrennten Beweis einfach eine zweistellige Regel auf ein schwaches Vorkommnis anwenden und erhält somit einen nicht-reduzierten Beweis. Um unsere bisherigen Untersuchungen zu kontextualisieren, möchten wir noch darauf hinweisen, dass sich mit etwas mehr Aufwand Beweise finden lassen, die reduziert, getrennt und nicht azyklisch sind. Ein Beispiel dazu wird in [1] vorgestellt.

4 Die Elimination von Zyklen

Dieser Abschnitt wird den Rest der Arbeit einnehmen und erbringt einen Beweis für Theorem 1. Wir beginnen mit der Vorstellung zweier Lemmata, die uns an wesentlichen Stellen für den Beweis behilflich sein werden.

4.1 Strukturelle Hilfsmittel

Lemma 4. *Sei Π ein Beweis mit Endsequent $\Gamma \rightarrow \Delta, B[A_1 \vee A_2]$, wobei die Subformel $A_1 \vee A_2$ positiv im Endsequent vorkommt. Dann gilt:*

1. *Es gibt einen getrennten Beweis Π' mit Endsequent $\Gamma \rightarrow \Delta, B[A_1], B[A_2]$, sodass $N(\Pi') \leq 2 \cdot \#\text{lines}(\Pi)$.*
2. *Im Flussgraphen $G_{\Pi'}$ des getrennten Beweises Π' gibt es einen Pfad v' , der zwei Vorkommnisse in Γ, Δ genau dann verbindet, wenn es einen Pfad v in Π gibt, der diese Vorkommnisse in Π verbindet.*

Beweis. Aufgrund unserer vorherigen Überlegungen können wir o.B.d.A. annehmen, dass Π getrennt ist. Um die erste Behauptung zu zeigen, transformieren wir zunächst Π in Π' und zeigen dann, dass die angegebene Ungleichung erfüllt ist.

- 1.1 Wir wollen zunächst Formeln $B[A_1], B[A_2]$ konstruieren, die unser $B[A_1 \vee A_2]$ ersetzen werden. Dazu betrachten wir zunächst alle logischen Pfade in Π , die nach $A_1 \vee A_2$ im Endsequent führen.

Sollten dabei Pfade von einem schwachen Vorkommnis $B'[A_1 \vee A_2]$ in einem Axiom in Π zur entsprechenden Subformel $B'[A_1 \vee A_2]$ im Endsequent verlaufen, dann ersetzen wir $B'[A_1 \vee A_2]$ durch zwei schwache Vorkommnisse $B'[A_1], B'[A_2]$ im Axiom und ersetzen dieses Paar entlang der Pfade, bis wir eine Regel finden mit $B'[A_1 \vee A_2]$ als Hilfsformel in Π . Es kann jedoch auch sein, dass Pfade von einer Hauptformel $A_1 \vee A_2$ einer \vee_r Regel ausgehen. In diesem Fall wenden wir \vee_r in Π'

4 Die Elimination von Zyklen

nicht an und ersetzen das Paar A_1, A_2 entlang der Pfade, bis wir eine Regel finden, mit $A_1 \vee A_2$ als Hilfsformel.

Sei Π_* ein Teilbeweis (von Π) mit Endsequent $\Gamma_* \rightarrow \Delta_*, B'[A_1 \vee A_2]$, Hilfsformel $B'[A_1 \vee A_2]$ und Pfad nach $B[A_1 \vee A_2]$. Angenommen, wir haben einen Beweis Π'_* mit Endsequent $\Gamma_* \rightarrow \Delta_*, B'[A_1], B'[A_2]$ konstruiert. Dann gilt:

1.1.1 Für alle zweistellige Regeln, angewandt auf Π_* und einen Teilbeweis Π_\circ , mit Endsequent $\Gamma_\circ \rightarrow \Delta_\circ, C$, finden wir ein Paar zweistelliger Regeln in Π' , das auf $\Gamma_\circ \rightarrow \Delta_\circ, C$ und Hilfsformel $B'[A_1]$ in Π'_* , sowie auf $\Gamma_\circ \rightarrow \Delta_\circ, C$ und Hilfsformel $B'[A_2]$ in Π'_* angewandt wird. Damit erhalten wir einen Teilbeweis, dessen Endsequent zwei Kopien von $\Gamma_\circ, \Delta_\circ$ enthält. Nun werden noch paarweise Kontraktionen auf den Formeln durchgeführt und der Fall ist erledigt.

1.1.2 Für alle einstellige Regeln angewandt auf die Hilfsformeln $B'[A_1 \vee A_2]$ und C in Π_* , wenden wir eine einstellige Regel auf $B'[A_1]$ und eine einstellige Regel auf $B'[A_2]$ an. Da einstellige Regeln zwei Prämissen voraussetzen und wir eine von diesen nach der ersten Anwendung verlieren, fügen wir ein schwaches Vorkommnis C an $B'[A_2]$ hinzu, um auch wirklich die Anwendung beider einstelligen Regeln zu gewährleisten. Dass dieses Hinzufügen den Beweis nicht vergrößert, wurde in [2] gezeigt.

1.1.3 Jede andere Regel in Π kann in Π' ohne Beschränkung übernommen werden. Nun sei Π_* ein Teilbeweis (von Π) mit Endsequent $B'[A_1 \vee A_2], \Gamma_* \rightarrow \Delta_*$. In diesem Fall verfahren wir aus Symmetriegründen ganz analog. Damit ist die Konstruktion von Π' abgeschlossen.

1.2 Wir wollen $N(\Pi') \leq 2 \cdot \#\text{lines}(\Pi)$ zeigen. Hierbei behelfen wir uns mit der Eigenschaft des getrennten Beweises. In der Konstruktion haben wir für die Transformation zweistelliger Regeln einen Teilbeweis Π_\circ dupliziert. Weil der Beweis jedoch als getrennt angenommen wurde, werden keine weiteren Kopien von Π_\circ hinzugefügt. Daraus folgt, dass in Π' höchstens $2 \cdot \#\text{lines}(\Pi)$ logische Regeln, Axiome und Schnitte auftreten.

2 Wir wenden uns nun der behaupteten Eigenschaft bezüglich des Flussgraphen G'_Π von Π' zu. Wir bemerken zunächst, dass ein Pfad v , der zwei Vorkommnisse im Endsequent eines Beweises verbindet, per definitionem durch atomare Vorkommnisse verläuft. Damit folgt die Behauptung aber durch Induktion nach Höhe der Teilbeweise von Π .

◻

Bemerkung 6. Dass diese Aussage nicht für Sprachen erster Stufe gilt sieht man durch das \mathcal{LK} -beweisbare Sequent $\rightarrow \forall x(Px \vee \neg Px)$ ein. Das Sequent $\rightarrow \forall x(Px), \forall x(\neg Px)$ ist

4 Die Elimination von Zyklen

offensichtlich nicht beweisbar.

Die beschriebene Transformation im Beweis von Lemma 4 macht sich der Einführung neuer schwacher Formeln und Kontraktion zu Nutze. Für den transformierten Beweis Π' hat dies zur Folge, dass neue Pfade (Brücken) entstehen könnten, die Vorkommnisse im Endsequent mit schwachen Vorkommnissen in Axiomen verbinden. Es wird sich in weiterer Folge als überaus wichtig erweisen, diese Situation näher zu erläutern:

Bemerkung 7. Wir erinnern uns daran, dass Brücken jene Pfade sind, die ein negatives Vorkommnis im Endsequent mit einem Positiven verbinden. Wir unterscheiden im Folgenden vier Formen, wie Brücken in diesem Zusammenhang auftreten können:

1. Liegt keines der Extreme einer Brücke in Π in $B[A_1 \vee A_2]$, so gibt es zwei Kopien dieser Brücke in Π' , die beide durch den Teilbeweis Π_\circ von Π verlaufen und deren Extreme in Π' mit Kontraktionen, angewandt auf $\Gamma_\circ, \Delta_\circ$ in Π'_* , korrespondieren.
2. Liegt ein Extrem in $B[A_1 \vee A_2]$ (nicht jedoch in $A_1 \vee A_2$) und das Andere in Γ, Δ in Π , so gibt es zwei Kopien dieser Brücke in Π' mit einem gemeinsamen Extrem in Γ, Δ , wobei das jeweils andere Extrem der einen Brücke in $B[A_1]$ liegt und das der Zweiten in $B[A_2]$.
3. Liegen beide Extreme einer Brücke in $B[A_1 \vee A_2]$ (nicht jedoch in $A_1 \vee A_2$), so gibt es zwei Kopien dieser Brücke in Π' , wobei die Extreme einer dieser Brücken in $B[A_1]$ liegen und die der Anderen in $B[A_2]$.
4. Liegen beide Extreme einer Brücke in $B[A_1 \vee A_2]$ (nicht jedoch in $A_1 \vee A_2$), so gibt es zwei Kopien dieser Brücke in Π' mit einem gemeinsamen Extrem in $B[A_1]$ (sei D das atomare Vorkommnis in $B[A_1]$ das dies erfüllt) und einem Paar an Extreme, wobei von diesen eines in $B[A_1]$ und eines in $B[A_2]$ vorkommt. Außerdem ist das zu D entsprechende atomare Vorkommnis in $B[A_2]$ schwach.

Lemma 5. *Sei Π ein Beweis mit Endsequent $\Gamma \rightarrow \Delta, B[A_1 \vee A_2]$, wobei die Subformel $A_1 \vee A_2$ negativ im Endsequent vorkommt. Dann gilt:*

1. *Es gibt getrennte Beweise Π_1 und Π_2 mit Endsequenten $\Gamma \rightarrow \Delta, B[A_1]$ und $\Gamma \rightarrow \Delta, B[A_2]$ respektive, sodass $\#\text{lines}(\Pi_1), \#\text{lines}(\Pi_2) \leq \#\text{lines}(\Pi)$.*
2. *Im Flussgraphen G_{Π_1} (G_{Π_2}) des getrennten Beweises Π_1 (Π_2) gibt es einen Pfad v^1 (v^2), der zwei Vorkommnisse in Π_1 (Π_2) genau dann verbindet, wenn es einen Pfad v in Π gibt, der diese Vorkommnisse in Π verbindet.*

Beweis. Zunächst machen wir von Theorem 12 Gebrauch, indem wir Π in einen getrennten Beweis Π^* mit höchstens $\#\text{lines}(\Pi)$ Zeilen transformieren. Ausgehend von Π^* wollen wir nun Beweise Π_1, Π_2 mit Endsequenten $\Gamma \rightarrow \Delta, B[A_1]$ und $\Gamma \rightarrow \Delta, B[A_2]$, respektive, konstruieren.

4 Die Elimination von Zyklen

1. Wir betrachten zunächst alle Pfade in Π^* , die von $A_1 \vee A_2$ im Endsequent ausgehen. Sollten Pfade zu einem schwachen Vorkommnis $B'[A_1 \vee A_2]$ in einem Axiom in Π verlaufen, so ersetzen wir den Knoten $B'[A_1 \vee A_2]$ mit dem Vorkommnis $B'[A_1]$ entlang des gesamten Pfades.
Sollten Pfade zu einer Hauptformel $A_1 \vee A_2$ in einer \vee_l Regel verlaufen, so verzichten wir auf die Anwendung der Regeln in Π_1 und betrachten lediglich den Teilbeweis von Π_1 , der A_1 als Hilfsformel benutzt. Genauer: Angenommen, die Obersequente von \vee_l sind $A_1, \Gamma_o \rightarrow \Delta_o$ und $A_2, \Gamma_* \rightarrow \Delta_*$ in den Teilbeweisen Π_o, Π_* , respektive. Nun nehmen wir für alle als Hauptformeln vorkommenden $A_1 \vee A_2$ in Π_1 einen Beweis Π'_o auf, der aus Π_o durch Hinzufügen von schwachen Formelmengen Γ_*, Δ_* hervorgeht, also das Endsequent $A_1, \Gamma_o, \Gamma_* \rightarrow \Delta_o, \Delta_*$ beweist. Um einzusehen, dass diese Hinzufügungen den Beweis nicht vergrößern, rekurren wir wieder auf [2]. Weil Π^* getrennt ist, wird zum Schluss der Beweis Π_1 wie Π_* aussehen, ausschließlich der Teilbeweise, in denen A_2 als Hilfsformel vorkommt, da diese nicht aufgenommen wurden (Man bemerke, dass aufgrund der Trennungseigenschaft keine zu $A_1 \vee A_2$ im Endsequent verbundenen Subformeln in den Nebenformeln $\Gamma_*, \Delta_*, \Gamma_o, \Delta_o$ enthalten sind). Für die Konstruktion von Π_2 aus Π^* geht man ganz analog vor.
2. Wie im zweiten Teil des Beweises zu Lemma 4 durch Induktion nach Höhe der Teilbeweise von Π .

–

Bemerkung 8. Wir haben bei der Transformation keine neuen Kontraktionen eingeführt, weshalb es zu keiner Duplikation von Zyklen kommen kann. Es kann allerdings der Fall eintreten, dass es ein Paar an Vorkommnissen in Π_1, Π_2 gibt, die über eine Brücke verbunden sind und nicht in A_1, A_2 , d.h. in Nebenformeln, liegen. Wir werden diese Situation an entsprechender Stelle im Beweis genauer untersuchen.

Wir möchten noch eine entscheidende Beobachtung in diesem Zusammenhang vorstellen. Gibt es eine Brücke in Π , die zwei Vorkommnisse in A_1 und A_2 verbindet, so wird dieser Pfad durch Lemma 5 gebrochen. Dieser Sachverhalt wird uns in der Formulierung eines Algorithmus zur Elimination eines einfachen Zyklus behilflich sein.

Es bleibt noch zu erwähnen, dass Lemma 4 und 5 auch gelten, falls wir anstelle von \vee den Junktor \wedge betrachten. Wir werden für alle weiteren Anwendung der Lemmata nicht mehr auf \vee bzw. \wedge eingehen, sondern lediglich, ob diese positiv oder negativ vorkommen.

4.2 Beweis des Hauptresultats

Wir sind nun in der Lage, Theorem 1 zu beweisen. Wir werden dabei in drei Schritten vorgehen, die so aussehen: Im ersten Abschnitt (1.) zeigen wir, dass die Elimination eines einfachen Zyklus eine quadratische Vergrößerung des Beweises nach sich zieht. Der zweite

4 Die Elimination von Zyklen

Teil (2.) wird sich eingehend mit den Möglichkeiten der Entstehung neuer Zyklen im Zuge von Beweistransformationen befassen. Im letzten Abschnitt (3.) werden wir diese Überlegungen zusammenfassen und die Aussage durch Konstruktion eines Algorithmus zeigen.

Beweis von Theorem 1. Aufgrund von Theorem 8 und Theorem 12 nehmen wir o.B.d.A. an, dass der Beweis Π reduziert und getrennt ist.

1. Zunächst betrachten wir einen Beweis mit k Zeilen und einem einfachen Zyklus. Wir zeigen nun, dass man den Zyklus so eliminieren kann, dass die Anzahl der Zeilen im resultierenden Beweis $\leq \mathcal{O}(k^2)$ ist. Wir geben einen Algorithmus an:

Wir sehen uns zunächst den zum Zyklus korrespondierenden speziellen Schnitt an. Seien Π_1 und Π_2 Teilbeweise mit Endsequenten $\Gamma_1 \rightarrow \Delta_1, C$ und $C, \Gamma_2 \rightarrow \Delta_2$ respektive. Dabei sei C die Schnittformel des speziellen Schnitts.

Wegen Theorem 10 (und weil Π reduziert ist) gilt für Länge der Schnittformel $|C| \leq 2 \cdot k$. Weil Π reduziert ist, enthält C in Π_1, Π_2 keine schwachen Vorkommnisse. Das heißt, alle atomaren Vorkommnisse in C haben einen direkten Pfad zu einem ausgezeichneten Vorkommnis in einem Axiom in Π_1 bzw. Π_2 . Von diesen Vorkommnissen gibt es aber höchstens $2 \cdot \#\text{lines}(\Pi_i)$, $i = 1, 2$ viele. Damit gilt sogar

$$|C| \leq 2 \cdot \min\{\#\text{lines}(\Pi_1), \#\text{lines}(\Pi_2)\} \leq k \leq 2 \cdot k.$$

Wir betrachten die Schnittformel C . Es seien B_1, B_2 die unmittelbaren Subformeln von C , d.h. im Fall, dass der Hauptjunktoren von C gleich \neg ist, wählen wir die nächstgrößte Subformel B , die nicht negiert ist und betrachten B'_1, B'_2 , und im Fall, dass der Hauptjunktoren $\wedge(\vee)$ und $C = A \wedge B$ ist, mit A, B als Subformeln, so betrachten wir A, B . Nun wählen wir ein Vorkommnis in B_1 und ein Vorkommnis in B_2 , durch die der Zyklus verläuft (wegen Lemma 3 finden wir zwei solcher unmittelbaren Subformeln in o.B.d.A. C ; dazu betrachtet man die größte unmittelbare Subformel B_i von C , die entweder eine Konjunktion oder Disjunktion ist und durch die ein Zyklus wie gewünscht verläuft).

Angenommen der Hauptjunktoren von C ist ein positiv (negativ) vorkommendes \wedge (\vee) in Π_1 und ein negativ (positiv) vorkommendes \wedge (\vee) in Π_2 und B_1, B_2 seien die unmittelbaren Subformeln von C . Dann wenden wir Lemma 5 auf Π_1 und erhalten die Teilbeweise $\Pi_{1,1}, \Pi_{1,2}$ mit Endsequenten $\Gamma_1 \rightarrow \Delta_1, C[B_1]$ und $\Gamma_1 \rightarrow \Delta_1, C[B_2]$, respektive. Wir wenden noch Lemma 4 auf Π_2 an und erhalten den Teilbeweis Π'_2 mit Endsequent $C[B_1], C[B_2], \Gamma_2 \rightarrow \Delta_2$. Als nächstes kombinieren wir die resultierenden Endsequente mit zwei Schnitten, und zwar so, dass zuerst die Schnittformel $C[B_i]$ ($i = 1, 2$), gewählt wird, die eine größere logische Komplexität hat (damit erreichen wir, dass für den letzten Schnitt gilt: $|B_i| \leq |B|/2 \leq |C|/2$). Im Fall, dass bei der Erzeugung der Teilbeweise durch die Lemmata der Zyklus gebrochen wird, sind wir fertig. Im anderen Fall verfahren wir weiter wie zuvor und betrachten den untersten Schnitt, d.h. den aktuellen speziellen

4 Die Elimination von Zyklen

Schnitt, durch den der Zyklus verläuft.

Wegen $|C| \leq k$ und $|B_i| \leq |C|/2 \leq k$ wird der eben beschriebene Algorithmus höchstens $\log k$ mal durchgeführt. Wegen Lemma 3 muss ein zyklischer Pfad durch mindestens zwei verschiedene Vorkommnisse in C verlaufen und weil wir aber nach $\log k$ Iterationen des Algorithmus bei einer Atomformel in C angelangen, ist der Zyklus nach höchstens $\log k$ Schritten eliminiert. Damit und als Konsequenz von Lemma 4 und Lemma 5 (in jedem Schritt des Algorithmus gehen wir von einem Teilbeweis Π_* aus für dessen Transformierte Π'_* ja $N(\Pi'_*) \leq 2 \cdot \#\text{lines}(\Pi_*)$ gilt) erhalten wir für eine Transformation von Beweis Π in den azyklischen Beweis Π' , dass

$$N(\Pi') \leq 2^{\log k} \cdot k = k^2.$$

Da wir jedoch an einer Schranke für die Anzahl der Zeilen in Π' interessiert sind, transformieren wir Π' mit Theorem 12 in einen reduzierten Beweis Π'' (man bemerke, dass die Anwendung von Lemma 5 zwei Beweise Π_1, Π_2 liefert, die, aufgrund der Einführung neuer schwacher Vorkommnisse, nicht mehr reduziert sind). Seien a die Anzahl der Axiome in Π'' und c die Anzahl der Kontraktionen in Π'' . Dann gilt nach Theorem 9, dass $a \geq c/2$. Insgesamt folgt für die Anzahl der Zeilen in Π'' :

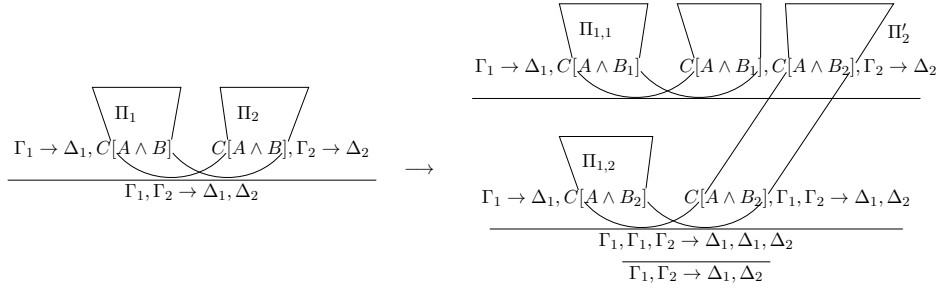
$$\#\text{lines}(\Pi'') \leq N(\Pi'') + 2 \cdot a \leq 3 \cdot k^2.$$

2. Innerhalb einer Beweistransformation kann es zur Bildung neuer einfacher Zyklen kommen. Wir werden nun die drei Klassen der Entstehungsformen neuer Zyklen vorstellen, wobei wir die Liste an möglichen Fällen innerhalb der jeweiligen Klassen diagrammatisch abhandeln werden:

- 2.1 Die erste Klasse ergibt sich durch Anwendung von Lemma 5 auf Π_1 . Sei \mathcal{C} ein einfacher Zyklus, dessen spezieller Schnitt in Π_1 liegt. In diesem Fall kann es vorkommen, dass im Zuge der Transformation eine Kopie von \mathcal{C} in $\Pi_{1,1}$ und eine Kopie von \mathcal{C} in $\Pi_{1,2}$ erhalten bleibt, wobei jede Kopie einen eigenen speziellen Schnitt hat, der im jeweiligen Teilbeweis $\Pi_{1,i}$ liegt.
- 2.2 Die zweite Klasse ergibt sich, wenn der Zyklus \mathcal{C} durch den zu transformierenden Beweisteil, d.h. Π_1, Π_2 , verläuft und dessen spezieller Schnitt genau der Schnitt ist, der auf die Schnittformel C in Π_1, Π_2 angewandt wird. In diesem Fall ist der Schnitt der auf C angewandt wird sowohl für den Zyklus \mathcal{C} , als auch für den jeweiligen Zyklus innerhalb des i -ten Schrittes des Algorithmus speziell. Wir untersuchen die nun möglichen Situation fallweise:
 - 2.2.1 Zwei einfache Zyklen verlaufen durch zwei Subformeln von C , d.h. C enthält eine Subformel $A \wedge B$ (oder $A \vee B$), wobei ein Zyklus durch A und der Andere durch B verläuft. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall,

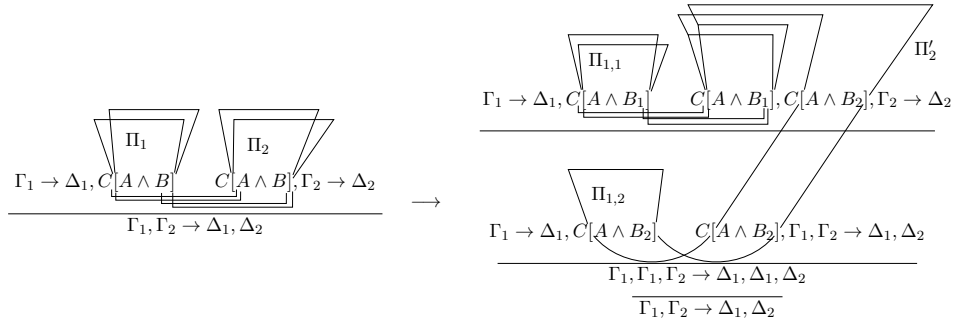
4 Die Elimination von Zyklen

dass B von der Form $B_1 \wedge B_2$ ist und der Zyklus in B sowohl durch B_1 , als auch durch B_2 verläuft (in komplizierteren Fällen wie beispielsweise dass B die Form $\neg \dots \neg (B_1 \wedge B_2)$ oder $D \vee (B_1 \wedge B_2)$ hat, verfahren wir analog). Die Elimination des Zyklus durch B mittels Lemmata 4 und 5 erzeugen der Teilbeweise $\Pi_{1,1}$, $\Pi_{1,2}$ und Π'_2 mit Endsequenzen $\Gamma_1 \rightarrow \Delta_1, C[A \wedge B_1], \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1, C[A \wedge B_2]$ und $C[A \wedge B_1], C[A \wedge B_2], \Gamma_2 \rightarrow \Delta_2$ respektive. Dabei verläuft ein Zyklus durch B_1, B_2 und der Andere durch Vorkommnisse von A . Das folgende Diagramm veranschaulicht eine mögliche Situation, in der sich Zyklen so ergeben:



Dabei entstehen zwei Kopien der Brücke in Π_2 , und zwar in der dritten Form aus Bemerkung 7, und der Zyklus C , der durch A verläuft, dupliziert sich zu zwei einfachen Zyklen, wobei beide neuen Schnitten die speziellen Schnitte für das Paar dieser Schnitte ist. Im Fall, dass zwei Kopien Π_2 der vierten Form aus Bemerkung 7 entstehen, gäbe es keine zwei Kopien der einfach Zyklen, da die Brücke in $\Pi_{1,2}$ in zwei schwachen Vorkommnissen in $C[A \wedge B]$ enden würde.

Eine mögliche Variation dieser Situation stellt das folgende Diagramm dar:

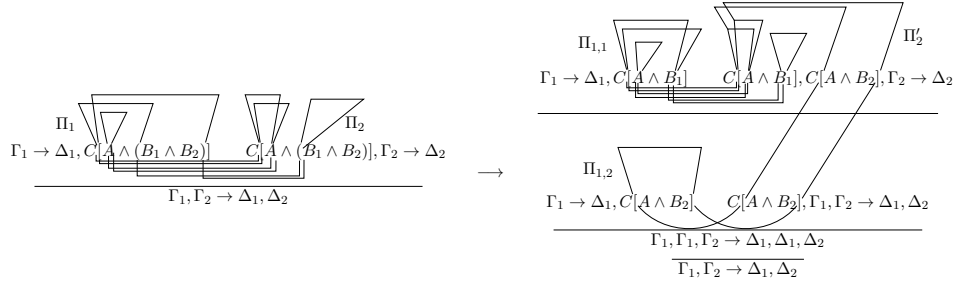


Hier verläuft der einfache Schnitt vier mal durch die Schnittformel C . Dabei gelte für die zwei Brücken in Π_2 , dass der Übergang zur Transformaten der vierten Form aus Bemerkung 7 entspricht, wobei dann von jeder dieser Brücken zwei Kopien in Π'_2 entstehen, die unter Kombination mit $\Pi_{1,1}$ und

4 Die Elimination von Zyklen

$\Pi_{1,2}$ zwei einfache Zyklen bilden. Nun verläuft einer der Zyklen nur durch $C[A \wedge B_1]$ und der Andere nur durch $C[A \wedge B_1], C[A \wedge B_2]$ und die speziellen Schnitte dieser Zyklen sind jene beiden Schnitte, die bei der Transformation durchgeführt werden.

- 2.2.2 Angenommen \mathcal{C} verläuft sowohl durch B als auch durch eine Subformel A , wobei für A und B in C gilt $C[A \wedge B]$ oder $C[A \vee B]$. Wieder kann es sein, dass es zu jedem Zyklus je zwei Kopien in den transformierten Teilbeweisen entstehen. Eine mögliche Situation ist im nachstehenden Diagramm abgebildet:



Hierbei verläuft der einfache Zyklus \mathcal{C} in Π durch A als auch B_1 . Die speziellen Schnitte sind, wie zuvor, die bei der Transformation durchgeführten Schnitte.

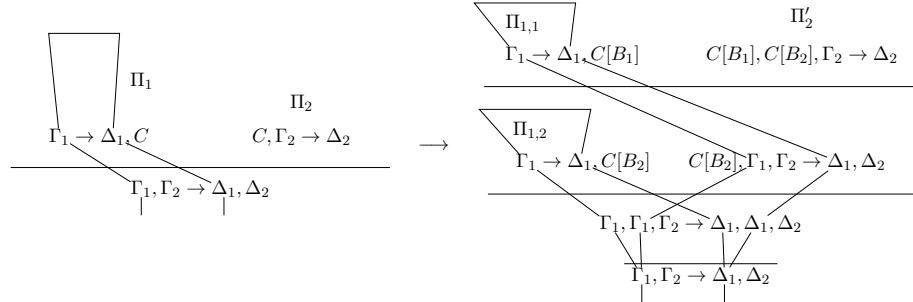
Wir möchten noch anmerken, dass ein einfacher Zyklus, der durch $B_1 \wedge B_2$ in $C[A \wedge (B_1 \wedge B_2)]$ (beziehungsweise in $C[A \vee (B_1 \wedge B_2)]$) verläuft, nicht jedoch durch A , nicht wie im beschriebenen Fall dupliziert wird. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der Schnitt für \mathcal{C} innerhalb des Algorithmus speziell ist und weil die Anwendung der Lemma 4 und Lemma 5 keine Brücken erzeugt, deren Extreme in B_1, B_2 liegen.

- 2.3 Die dritte und zugleich letzte Klasse ergibt sich, wenn der Zyklus \mathcal{C} durch den zu transformierenden Beweisteil, d.h. Π_1, Π_2 , verläuft und dessen spezieller Schnitt unterhalb von Π_1, Π_2 liegt. Wir untersuchen nun wieder fallweise die möglichen Situationen.

- 2.3.1 Die erste Situation ergibt sich, wie in Bemerkung 8 bereits dargelegt, durch Anwendung von Lemma 5 auf Π_1 . Angenommen, es gibt Brücken in $\Pi_{1,1}, \Pi_{1,2}$, deren Extreme in Nebenformeln von Γ, Δ_1 liegen. Nach Konstruktion des Algorithmus werden Kontraktionen auf die Nebenformeln Γ_1, Δ_1 von $\Pi_{1,1}, \Pi_{1,2}$ angewandt, was dazu führt, dass die Extreme der Brücken auf gemeinsame Extreme zusammengezogen werden. War die Brücke in Π_1 mit Extreme in Γ_1, Δ_1 Teil von \mathcal{C} in Π , so liegen nach dem Transformationsschritt zwei verschachtelte Zyklen in Π' vor (die den selben speziellen Schnitt und die selbe

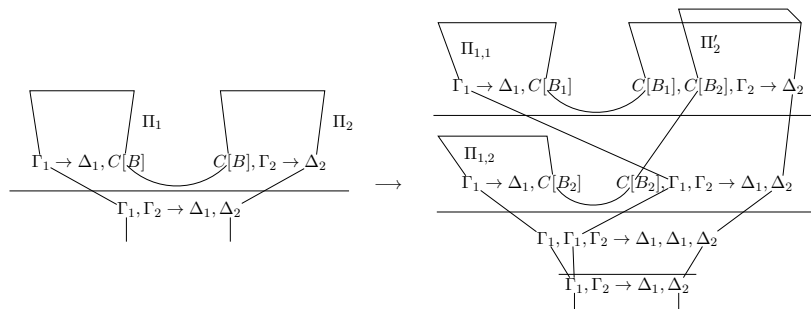
4 Die Elimination von Zyklen

spezielle Menge haben). Das Diagramm dazu sieht so aus:



2.3.2 Die umgekehrte Situation ergibt sich durch Anwendung von Lemma 4 auf Π_2 . Angenommen, es gibt eine Brücke in Π_2 , deren Extreme in Γ_2, Δ_2 liegen. Nun kann es vorkommen, dass es zwei Kopien dieser Brücke gibt, die der ersten Form von Bemerkung 7 entsprechen, d.h. die Extreme der Kopien, die jeweils in Γ_2, Δ_2 von Π'_2 liegen, stimmen paarweise überein. War die Brücke in Π_2 mit Extreme in Γ_2, Δ_2 teil von C in Π , so liegt nach dem Transformationsschritt ein neuer einfacher Zyklus in Π' , der mit C verschachtelt ist, wieder mit selben speziellen Schnitt und der selben speziellen Menge.

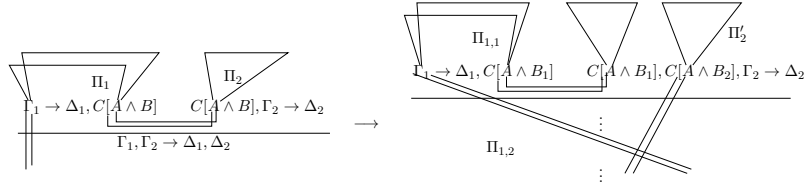
2.3.3 Ebenfalls durch Anwendung von Lemma 4 auf Π_2 kann es sein, dass eine Brücke in Π_2 der zweiten Form in Bemerkung 7 entsprechend dupliziert wird. Hierbei stimmt eines der Extreme der Kopien überein und liegt in den Nebenformeln Γ_2, Δ_2 und die jeweils anderen Extreme liegen in $C[B_1], C[B_2]$ respektive. Andererseits werden unter Anwendung von Lemma 5 zwei Brücken in $\Pi_{1,1}, \Pi_{1,2}$ induziert, wobei wieder jeweils ein Extrem beider Brücken vermittels Kontraktion zusammengezogen wird und in Γ_1, Δ_1 in Π' liegt. Wieder ist es so, dass, falls die Brücke teil von C war, die Transformation einen neuen einfachen Zyklus erzeugt, der mit C verschachtelt ist. Das Diagramm dazu sieht so aus:



2.3.4 Die nächste Situation ist eine Variation von [2.3.3]. Das Diagramm dazu sieht

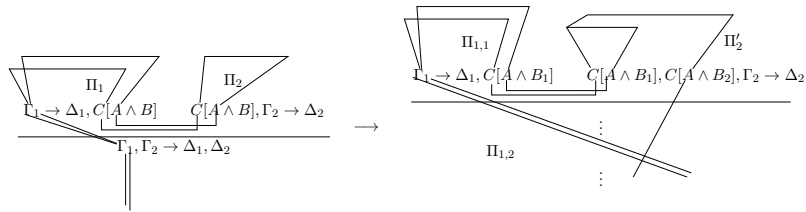
4 Die Elimination von Zyklen

so aus:



Ein Zyklus verläuft durch A und die Nebenformeln Γ_1, Δ_1 in Π . Angenommen, die Brücke in Π_2 wird der dritten Form entsprechend aus Bemerkung 7 transformiert. Dann ist es auch hier wieder so, dass, die Transformation einen neuen einfach Zyklus erzeugt, der mit C verschachtelt ist.

2.3.5 Die nächste Situation ist wieder eine Variation von [2.3.3]. Das Diagramm dazu sieht so aus:



Hierbei wird die Brücke in Π_2 der vierten Form entsprechend aus Bemerkung 7 transformiert. Als Ergebnis der Transformation erhalten wir zwei einfach Zyklen mit dem selben speziellen Schnitt, im Fall, dass die Brücke in Π Teil von C war.

2.3.6 Die symmetrische Fälle zu [2.3.4] und [2.3.5] behandelt man ganz analog.

Diese drei Fällen decken nun alle möglichen Situation ab, in der sich neue einfache Zyklen bilden können. Alle komplizierteren Fälle, selbst wenn C mehrere Male durch die Schnittformel C verläuft, lassen sich mit diesen Beobachtungen fassen.

Wir bemerken noch, dass der Algorithmus keinen 'neuen' Zyklus erzeugt, sondern nur solche hervorbringt die aus bereits bestehenden Brücken und Schnittkanten geformt werden können.

Die Schlüsselbeobachtung dieser Fälle ist die Folgende: Im ersten, sowie auch im zweiten Fall, wird die Anzahl der verschachtelten Zyklen erhöht. Im dritten Fall hingegen bleibt diese Zahl jedoch unverändert, i.e. es werden zwar neue einfache Zyklen erzeugt, aber kommt es dabei zu keinen Verschachtelungen der Pfade. Diese Feststellung ist so wichtig, weil wir uns für die Aufstellung des Algorithmus für den allgemeinen Fall explizit die Eigenschaft des dritten Falles zu Nutze machen werden:

4 Die Elimination von Zyklen

3. Sei Π ein Beweis mit n einfachen Zyklen, k Zeilen und k_0 speziellen Schnitten. Offensichtlich ist $k_0 \leq n$, weil es zu jedem Zyklus genau einen dieser Schnitte gibt. Sei weiters $n_{0,i}$ für $i = 1, \dots, k_0$ die Anzahl der einfachen Zyklen, die dem i -ten speziellen Schnitt in Π entsprechen und $m_{0,i}$ für $i = 1, \dots, k_0$ die Anzahl der (verschiedenen) speziellen Mengen zu $n_{0,i}$. Offenbar ist dann $n_{0,1} + \dots + n_{0,k_0} = n$ und wegen $m_{0,i} \leq n_{0,i}$ auch $m_{0,1} + \dots + m_{0,k_0} \leq n$.

Wir geben nun einen Algorithmus an, der den Beweis Π in einen azyklischen Beweis Π' transformiert. Dazu müssen wir alle voneinander verschiedenen verschachtelten Zyklen, die den i -ten speziellen Schnitt passieren, von denen es per definitionem $m_{0,1} + \dots + m_{0,k_0}$ viele gibt, eliminieren. Dies gelingt uns durch ein ähnliches Vorgehen wie im Fall für die Elimination eines einfachen Zyklus. Wir reduzieren so lange die Anzahl der Schnittkanten in Π , bis für alle speziellen Mengen eine Mächtigkeit von 1 erreicht wird, d.h. wir entfernen die Vorkommnisse innerhalb spezieller Schnitte, die von verschachtelten Zyklen durchlaufen werden. Wie bereits erwähnt, soll dabei in jedem Schritt die Anzahl der verschachtelten Zyklen durch n beschränkt bleiben, mithin also nur solche Transformationen zugelassen sein, die sich im dritten Fall von **(2.)** widerspiegeln.

Der Algorithmus ist wie folgt erklärt: Sei der Beweis Π o.B.d.A. reduziert und getrennt. Die Länge der Schnittformeln in Π sind durch k beschränkt. Zunächst betrachten wir die verschachtelten Zyklen deren Teilbeweise nur einen speziellen Schnitt als letzte Regel haben. Sei C die entsprechende Schnittformel. Dann verfahren wir wie in **(1.)**, indem wir nun die Subformel B mit Hauptjunktoren \wedge oder \vee betrachten, deren logische Komplexität größer ist, als die der anderen unmittelbaren Subformel in C , und die zusätzlich eine der nachstehenden Bedingung erfüllt:

1. Die Formel B enthält zwei atomare Vorkommnisse, die in zwei verschiedenen unmittelbaren Subformeln B_1, B_2 von B liegen, durch die ein verschachtelter Zyklus verläuft,
2. oder C ist ein spezieller Schnitt für ein Paar von verschachtelten Zyklen, die durch zwei verschiedene unmittelbare Subformeln B_1, B_2 von B verlaufen (durchläuft dabei einer der Zyklen B_1 als auch B_2 , so ist die erste Bedingung schon erfüllt).

Der Algorithmus arbeitet nun wie in **(1)** mit der Spaltung und Rekombination von Teilbeweisen Π_1, Π_2 durch zwei neue Schnitte mit Schnittformeln $C[B_1]$ und $C[B_2]$.

Weil die logischen Flussgraphen G_{Π_1}, G_{Π_2} der Teilbeweise keine spezielle Schnitte enthalten, kann es nicht sein, dass zwei Kopien von verschachtelten Zyklen erzeugt werden. Damit werden keine Zyklen erzeugt, die der ersten Klasse [2.1] in **(2.)** entsprechen.

Es kann aber auch nicht der Fall sein, dass ein Zyklus sowohl durch B als auch eine andere Subformeln von C verläuft, zumal B die größte Subformel von C ist, die die erste Bedingung erfüllt, womit die Situation aus [2.2.2] ausgeschlossen ist. Wegen der zweiten Bedingung kann nun aber auch nicht der Fall eintreten, dass ein Zyklus durch eine

4 Die Elimination von Zyklen

Subformel von C verläuft, die disjunkt von B ist, womit die Situation [2.2.1] ebenfalls ausgeschlossen ist. Insgesamt werden also keine Zyklen erzeugt, die der zweiten Klassen [2.2] in (2.) entsprechen.

Nun kann es jedoch passieren, dass neue Brücken durch Kontraktionen so zusammengezogen werden, dass im Zuge der Transformationsschritte neue einfache Zyklen entstehen, die der dritten Klasse [2.3] in (2.) entsprechen. Das bedeutet jedoch auch, dass es zu keinen neuen Verschachtelungen der Zyklen kommt, wenngleich die Anzahl neuer einfacher Zyklen und spezieller Schnitte (man bemerke dazu, dass die Anwendung von Lemma 4 und Lemma 5 auf Teilbeweise Π_1, Π_2 einen Schnitt durch zwei neue Schnitte auf $C[B_1], C[B_2]$ ersetzt) erhöhet werden kann.

Damit erhalten wir schließlich, dass für die Anzahl k_l der speziellen Schnitt im l -ten Schritt des Algorithmus gilt: $k_l \leq n$. Furderhin gilt für die Anzahl der zum k_l -ten speziellen Schnitt assoziierten verschachtelten Zyklen im l -ten Schritt des Algorithmus, dass $m_{l,1} + \dots + m_{l,k_l} \leq n$. Falls beide Schnitte auf $C[B_1], C[B_2]$ speziell sind, so gilt $k_l = k_{l-1} + 1$ und falls im l -ten Schritt der Iteration r verschachtelte Zyklen eliminiert wurden (möglicherweise werden in einem Schritt mehrere verschachtelte Zyklen auf einmal unterbrochen), dann gilt sogar $m_{l,1} + \dots + m_{l,k_l} = m_{l-1,1} + \dots + m_{l-1,k_{l-1}} - r \leq n$.

Wie in (1.) ausgeführt, benötigt der Algorithmus für die Elimination eines verschachtelten Zyklus höchstens $\log k$ Schritte, was genau dann der Fall ist, wenn für die zugehörige spezielle Menge \mathcal{S} gilt: $|\mathcal{S}| = 1$. Weil die Anzahl der speziellen Schnitt durch n beschränkt ist, terminiert der Algorithmus für die Reduktion aller speziellen Schnitte nach höchsten $n \cdot \log k$ Schritten. Der Algorithmus wird dabei höchstens n mal aufgerufen, da wegen der zweiten Bedingung höchsten n verschachtelte Zyklen in verschiedenen disjunkten Subformeln der speziellen Schnitte vorkommen können. Insgesamt terminiert der Algorithmus somit nach höchstens $n \cdot \log k + n$ Schritten für die Elimination aller Zyklen. Für den azyklischen Beweis Π' erhalten wir also

$$N(\Pi') \leq 2^{n \cdot \log k + n} \cdot k = 2^n \cdot k^{n+1}.$$

Mit Hinblick auf die Überlegungen aus (1.) ergibt sich für den reduzierten Beweis Π'' (aus Π') mit die Anzahl der Axiome a und Kontraktionen c , sowie $a \geq c/2$, dass

$$\#\text{lines}(\Pi'') \leq N(\Pi'') + 2 \cdot a \leq 3 \cdot 2^n \cdot k^{n+1}.$$

Also $\#\text{lines}(\Pi'') \in \mathcal{O}(k^{n+1})$.

+

Literaturverzeichnis

- [1] Alessandra Carbone. *The cost of a cycle is a square*. **The Journal of Symbolic Logic**, Volume 67, Number 1, 2002.
- [2] Alessandra Carbone. *Interpolants, cut elimination and flow graphs for the propositional calculus*. **Annals of Pure and Applied Logic**, Volume 83, 1997, 249 – 299.
- [3] Alessandra Carbone. *Cycling in proofs and feasibility*. **Transactions of the American Mathematical Society**, Volume 352, 2000, 2049 – 2075.
- [4] Samuel Buss. *The undecidability of k -provability*. **Annals of Pure and Applied Logic**, Volume 53, 1991, 72 – 102.
- [5] Gaisi Takeuti. *Proof Theory*. **Dover Publications**, Second edition, 1987.