Seminararbeit

Seminar aus der Theoretischen Informatik
Modell Theoretische Spiele

Autor
Paul Hotzy BSc

Unter Aufsicht von
Assoc. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.
Stefan Hetzl

Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstraße 8-10
1040 Wien, Österreich

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Definitonen

Diese Seminararbeit beruht auf dem 4. Kapitel von [1] und beschäftigt sich mit der Ausdrucksstärke der Prädikatenlogik erster Stufe im Hinblick auf formale Sprachen. Zur Analyse der Ausdrucksstärke werden die Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele behandelt. Diese liefern Hilfsmittel für Beweise, die zeigen, dass sich bestimmte Sprachen nicht mit gewissen Logiken beschreiben lassen. Als zwei größere Anwendungen dieser Spiele werden $FO[<]$ und $FO[+1]$ angegeben.

1.1 Definitionen

In diesem Abschnitt widmen wir uns den wichtigsten Definitionen, um den Weg für die Beschreibung von Sprachen mit logischen Formeln erster Stufe zu ebnen. Formeln in Prädikatenlogik erster Stufe sind induktiv defniert. Wichtige Begriffe sind Konstantensymbole $(a, b, c, ...)$ Variablensymbole, $(x, y, z, ...)$, Funktionsymbole $(f, g, h, ...)$ und Relationssymbole $(<, =, \leq, R, ...)$. Letztere werden, mit Ausnahme von $Q_a(x)$, im Kontext dieser Arbeit auch oft als numerische Prädikate bezeichnet. Als Atomformeln bezeichnen wir jene Formeln, die nur aus Relations-, Variablen- und Konstantensymbolen bestehen.

Definition 1.1.1.
Wir definieren Formeln einer Prädikatenlogischen Sprache induktiv.

1. Jede Atomformel ist eine Formel.
2. Wenn ϕ eine Formel ist, dann auch $\neg\phi$.
3. Wenn ϕ und ψ Formeln sind, dann auch $\phi \wedge \psi$ sowie $\phi \vee \psi$.
4. Wenn ϕ eine Formel ist, dann auch $\exists x\phi$ sowie $\forall x\phi$.

Ein weiterer wichtiger Begriff ist der der $\mathcal{V}$-Struktur mit $\mathcal{V}$ als endliche Menge von Variablen erster Ordnung. Eine Struktur ist ein Tupel $(M,\mathcal{I})$ wobei M eine nichtleere Menge und $\mathcal{I}$ eine Abbildung, genannt Interpretation, ist. Die Interpretation weist jedem Konstantensymbol ein Element aus M, jedem Funktionssymbol eine Funktion von M^k nach M (gemäß der Stelligkeit k) und jedem Relationssymbol eine Relation auf M^k (gemäß der Stelligkeit k) zu. Im Kontext formaler Sprachen fassen wir Strukturen auf eine Weise auf mit der wir besser umgehen können. Wir machen in weiterer Folge auch keine strikte Unterscheidung zwischen Relationssymbolen und Relationen. (Funktionen/ Funktionssymbole werden wir im weiteren Verlauf ohnhin nicht benötigen.)
Eine $\mathcal{V}$-Struktur ist ein Wort über einem erweitertertem Alphabet $A \times \mathfrak{P}(\mathcal{V})$ der Form

$$(a_1, U_1) \ldots (a_r, U_r),$$

wobei $U_i \cap U_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ und $\bigcup\limits_{i=1}^{r} U_i = \mathcal{V}$ gilt.
Formeln beschreiben also Eigenschaften von Wörter über einem erweiterten Alphabet. Wir können nun definieren, was es bedeutet, wenn eine $\mathcal{V}$-Struktur w eine Formel ϕ erfüllt, also $w \vDash_{\mathcal{I}} \phi$. $Q_a(x)$ ist im Übrigen jenes Prädikat, welches im Kontext formaler Sprachen besagt, dass der x-te Buchstabe eines Worts a ist.

Definition 1.1.2.
Wir definieren $w \models_{\mathcal{I}} \phi$ induktiv.

1. $w \models_{\mathcal{I}} Q_a(x) \Leftrightarrow$ Es gibt einen Buchstaben der Form (a, S) in w mit $x \in S$.
2. $w \models_{\mathcal{I}} R(x_1, ..., x_k) \Leftrightarrow R_{\mathcal{I}}(i_1, ..., i_k)$ wobei $i_1, ..., i_k$ die Stellen sind an denen die Variablen $x_1, ..., x_k$ im Wort vorkommen.
3. $w \models_{\mathcal{I}} \phi \wedge \psi \Leftrightarrow w \models_{\mathcal{I}} \phi$ und $w \models_{\mathcal{I}} \psi$.
4. $w \models_{\mathcal{I}} \phi \vee \psi \Leftrightarrow w \models_{\mathcal{I}} \phi$ oder $w \models_{\mathcal{I}} \psi$.
5. $w \models_{\mathcal{I}} \neg\phi \Leftrightarrow w \not\models_{\mathcal{I}} \phi$
6. $w = (a_1, S_1) \dots (a_r, S_r) \models_{\mathcal{I}} \exists x \phi \Leftrightarrow$
   $\exists i \in \{1, ..., r\} : (a_1, S_1) \dots (a_i, S_i \cup \{x\}) \dots (a_r, S_r) \models_{\mathcal{I}} \phi$
7. $w = (a_1, S_1) \dots (a_r, S_r) \models_{\mathcal{I}} \forall x \phi \Leftrightarrow$
   $\forall i \in \{1, ..., r\} : (a_1, S_1) \dots (a_i, S_i \cup \{x\}) \dots (a_r, S_r) \models_{\mathcal{I}} \phi$

Diese Definiton über einem erweiterten Alphabet ist deshalb notwendig, weil wir im Allgemeinen Formeln mit freien Variablen, also Variablen die nicht mit einem Quantor gebunden sind, keine Bedeutung geben können. Wir werden Sprachen mit geschlossenen Formeln, also Formeln ohne freie Variablen, definieren respektive beschreiben. Sei also ϕ eine geschlossene Formel und A ein Alphabet. Ein Wort $w \in A^*$ kann als $\emptyset$-Struktur aufgefasst werden. Wir bezeichnen

$$L_\phi = \{w \in A^* : w \models_{\mathcal{I}} \phi\}$$

als die von ϕ definierte Sprache.

Beispiel 1.1.3. *Sei A ein beliebiges Alphabet, $\phi = \exists x \exists y (x < y)$ und $L_\phi = \{w \in A^* : w \models \phi\}$ die von ϕ definierte Sprache. Wir interpretieren $<$ als die übliche Ordnungsrelation. Dann beschreibt ϕ genau die Menge aller Wörter über A mit einer Mindestlänge von zwei Buchstaben, also*

$$L_\phi = \{w \in A^* : |w| \geq 2\}.$$

2 Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

2.1 Motivation

Das Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel dient im allgemeinen Kontext der Modelltheorie, um die Äquivalenz zweier Strukturen auf Sätzen mit beschränkter Komplexität zu zeigen oder zu widerlegen. Die Eigenschaften dieser Wörter können mit Formeln erster Stufe beschrieben werden. Es zeigt sich allerdings sehr schnell, dass sich nicht alle Sprachen mit Prädikatenlogik erster Stufe beschreiben lassen. Demnach gibt es nicht für jede Sprache eine Theorie, die genau die Wörter einer gegebenen Sprache beschreibt. Dies ist selbst dann wahr, wenn wir uns auf reguläre Sprachen einschränken (Satz 3.1.1).
Die Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele eigenen sich im Zusammenhang mit formalen Sprachen also zur Analyse der Ausdrucksstärke von Logiken, insbesondere der Prädikatenlogik erster Stufe.

2.2 Vorbereitung

Für den Beweis vom *Hauptsatz über die Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele* (Satz 2.3.2) erweist sich die folgende Definition der Quantorenkomplexität als hilfreich. Sie ist induktiv für alle Formeln erster Ordnung definiert.

Definition 2.2.1.
Sei ϕ eine Formel erster Ordnung, dann ist die Quantoren Komplexität $c(\phi)$ induktiv definiert:

1. $c(\phi) := 0$, wenn ϕ Atomformel
2. $c(\phi) := c(\neg\phi)$
3. $c(\phi \wedge \psi) = c(\phi \wedge \psi) := \max\{c(\phi), c(\psi)\}$
4. $c(\exists x\phi) = c(\forall x\phi) := c(\phi) + 1$.

Wir können also nun jeder Formel ihre Quantorenkomplexität zuweisen. Umgekehrt stellt sich die Frage, wie viele Formeln mit einer bestimmten Form (Normalform), es für eine gegebene Quantorenkomplexität gibt. Folgende Aussage gibt Aufschluss darüber und erweist sich als subtile, aber sehr wichtige Eigenschaft im Beweis von Satz 2.3.2.
Analog zum Satz über Disjunktive Normalformen aus der Aussagenlogik, kann jede quantorenfreie Formel als Disjunktion von Konjunktionen aus Atomformeln und deren Negation geschrieben werden. Sowohl die Konjunktion als auch die Disjunktion sind idempotent, daher können wir jede wiederholt auftretende Formel in den Disjunktionen und Konjunktionen kürzen. Für Formeln mit Komplexität $c+1$ finden wir eine Darstellung aus Disjunktionen von Konjunktionen aus Formeln $\exists x\phi$, $\forall x\phi$ oder ϕ mit Formeln ϕ für die $c(\phi) < c$ gilt. Wenn wir nun jede Formel ϕ in dieser Form anschreiben und wiederholt auftretende Formeln kürzen, nennen wir die eben beschriebene Darstellung Normalform. Jede Formel ist zu ihrer Normalform äquivalent, dass heißt sie wird von den selben Strukturen erfüllt.

Proposition 2.2.2.
Sei $\mathcal{V}$ eine endliche Menge von Variablen erster Ordnung und sei $c \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Es gibt nur endliche viele Formeln erster Ordnung in Normalform mit Komplexität $\leq c$ deren Variablen aus $\mathcal{V}$ sind.

Beweis.
Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion über c.
Induktionsanfang: $c = 0$
Die Anzahl der Formeln mit Komplexität c hängt direkt von der Mächtigkeit der Atomformeln ab. Diese ist aufgrund der Endlichkeit von $\mathcal{V}$ endlich und hängt allerdings von der Menge der numerischen Predikate und deren Stelligkeiten ab. Wir bezeichnen die Anzahl der Atomformeln mit m. Es gibt daher $2m$ Atomformeln und deren Negationen woraus sich 2^{2m} Konjunktionen und weiter $2^{2^{2m}}$ disjunktive Normalformen ergeben.
Induktionshypothese:
Es gibt weniger als $p \in \mathbb{N}$ Formeln ψ in Normalform mit $c(\psi) \leq c - 1$.
Induktionsschritt: $c > 0$
Es gibt weniger als $2p$ Formeln von der Form $\exists x\phi$ oder $\neg\exists x\phi$ mit $c(\phi) < c$. Damit gibt es höchstens 2^{2p} Konjunktionen von Formeln dieser Form. Zu diesen Konjunktionen kann man nun noch eine Formel mit Komplexität $< c$ hinzufügen, woraus folgt, dass es höchstens $q = (p + 1)2^p$ Disjunktionen zweier solcher Formeln geben kann. Es kann daher nicht mehr als 2^q Formeln in Normalform mit Komplexität $\leq c$ geben. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass wir den Allquantor nicht berücksichtigen, da es zu jeder allquantifizierten Formel eine äquivalente existenzquantifizierte Formel gibt und umgekehrt. □

Definition 2.2.3.
Seien w_1 und w_2 Strukturen über einer endlichen Variablenmenge $\mathcal{V}$ und $r \in \mathbb{N}$. Wir definieren:

$$w_1 \sim_r w_2 :\Leftrightarrow (\forall\phi : c(\phi) \leq r \Rightarrow w_1 \vDash_{\mathcal{I}} \phi \Leftrightarrow w_2 \vDash_{\mathcal{I}} \phi).$$

Bemerkung 2.2.4.
Diese Relation ist sogar eine Äquivalenzrelation. Wir nennen Strukturen w_1, w_2 elementar äquivalent, wenn für alle $r \in \mathbb{N}$ $w_1 \sim_r w_2$ gilt.

2.3 Das Spiel

Gegeben sind die Rundenanzahl r und zwei $\{y_1, ..., y_p\}$-Modelle w_1 und w_2. Gespielt wird das Spiel von zwei Spielern PI und PII. Jeder Spieler hat r Spielsteine in Form von Variablen $z_1, ..., z_r$. Das Spiel besteht aus r Runden, in jeder Runde muss jeder Spieler einen seiner Steine auf eine der gegebenen Strukturen setzen. Dabei ist die Vorstellung von Strukturen als Wörter hilfreich. In unserem Kontext setzten die Spieler ihre Spielsteine auf die Buchstaben eines Wortes w_1 oder w_2. Nach dem Setzen eines Steins kann er nicht mehr bewegt werden.

Die i-te Runde des Spiels verläuft folgendermaßen:

1. PI setzt seinen Spielstein z_i auf einen Buchstaben von w_1 oder w_2.
2. PII setzt seinen Spielstein z_i auf einen Buchstaben des Wortes auf welches PI nicht gesetzt hat.

Beide Spieler verfolgen dabei unterschiedliche Ziele:
PI versucht zu zeigen, dass die beiden Strukturen unterschiedlich also nicht äquivalent sind während PII versucht zu zeigen, dass die beiden Strukturen gleich also äquivalent sind. Aus diesem Grund wird PI oft auch als „Spoiler“ und PII als „Duplicator“ bezeichnet.[1]
Nach r Runden endet das Spiel, also wenn beide Spieler ihre Spielsteine aufgebraucht haben. Dabei sind nun zwei $\{y_1, ..., y_p, z_1, ..., z_r\}$-Strukturen entstanden. Wir nennen sie w'_1 und w'_2. PII gewinnt das Spiel wenn $w'_1 \sim_0 w'_2$ gilt. Ansonsten gewinnt PI. Wir sagen, dass einer der Spieler eine Gewinnstrategie besitzt wenn er durch das Anwenden seiner Strategie gewinnt, unabhängig davon wie der andere Spieler setzt. Für ein r Runden langes Spiel nennen wir eine solche Strategie eine r-Gewinnstrategie.

Beispiel 2.3.1. *Seien $\mathcal{V} = \emptyset$, $w_1 = ab$ und $w_2 = baa$ und das einzige Relationssymbol sei die Gleichheit.*

Betrachten wir zunächst das Spiel mit einer Runde:

1.1 *PI setzt seinen Spielstein z_1 auf das a von w_1.*

PII hat nun drei Optionen:

1.2 *(Option 1) PII setzt seinen Spielstein z_1 auf das b von w_2.*

1.2 *(Option 2) PII setzt seinen Spielstein z_1 auf das erste a von w_2.*

1.2 *(Option 3) PII setzt seinen Spielstein z_1 auf das zweite a von w_2.*

Da wir als einziges Relationssymbol die Gleichheit festgesetzt haben, erfüllen w'_1 und w'_2 in Option 2 und Option 3 trivialerweise genau die selben Atomformeln. Wählt PII Option 1, so verliert er, da w'_1 $Q_a(z_1)$ erfüllt aber w'_2 nicht. Da PII ebenfalls so setzen kann, dass er gewinnt, wenn PI auf das b von w_1 setzt sowie auf einen der Buchstaben von w_2, folgt, dass PII eine 1-Gewinnstrategie auf (w_1, w_2) besitzt.

Betrachten wir nun das Spiel mit zwei Runden:

1.1 *PI setzt seinen Spielstein z_1 auf das erste a von w_2.*

1.2 *PII muss nun seinen Spielstein z_1 auf das a von w_1 setzen, um noch gewinnen zu können. Würde er es auf b setzen, kann PI in der nächsten Runde auf den selben Buchstaben setzen und hätte gewonnen, da $Q_a(z_1)$ in w'_1 gelten würde, aber in w'_2 nicht.*

2.1 *PI setzt seinen Spielstein z_2 auf das zweite a von w_2.*

PII hat nun zwei Optionen:

2.2. *(Option 1) PII setzt seinen Spielstein z_2 auf das a von w_1. Dann erfüllt w'_2 die Formel $z_1 = z_2$ aber w'_2 nicht. PII verliert also.*

[1] Gelegentlich werden die Spieler auch „Samson“ und „Delilah“ genannt.

2.2. *(Option 2) PII setzt seinen Spielstein z_2 auf das b von w_1. Dann erfüllt w_1' die Formel $Q_a(z_1)$ aber w_2' nicht. PII verliert also. Das heißt PI kann, unabhängig davon wie PII setzt, gewinnen. Also hat PI eine 2-Gewinnstrategie.*

Es stellt sich nun die Frage, ob einer der beiden Spieler immer eine Gewinnstrategie besitzt. Wenn ein Spieler eine Gewinnstrategie hat, kann der andere keine haben, da dies der Definition widersprechen wurde. Man kann sogar zeigen, dass für eine gegebene Anzahl an Runden r und Strukturen w_1 und w_2 einer der beiden Spieler immer eine Gewinnstrategie hat.
Man stelle sich dazu einen Baum vor dessen Wurzel das Tupel (w_1, w_2) darstellt und dessen Knoten die aus den Spielzügen resultierenden Strukturen darstellen. Dabei korrespondieren die Kinder der Wurzel zu den Strukturen, die aus dem ersten Spielzug von PI resultieren und deren Kinder zu den Strukturen, die aus dem ersten Spielzug von PII resultieren. Diese Konstruktion wird bis zum letzen Spielzug fortgesetzt, womit dieser Baum genau $2r$ hoch ist. Die Blätter des Baums stellen alle möglichen Ausgänge des Spiels dar, da immer einer der beiden Spieler gewinnt, können wir nun die Blätter folgendermaßen markieren. Gewinnt PI markieren wir das Blatt mit I sonst mit II. Einen inneren Knoten aus einer Ebenen die zu PI korrespondiert markieren wir mit I genau dann, wenn eines der Kinder mit I markiert wurde sonst mit II. Analog für Knoten in Ebenen die zu PII korrespondieren. Sind nun alle Kinder der Wurzel mit II markiert, hat PII eine r-Gewinnstrategie sonst hat PI eine r-Gewinnstrategie. Da einer der beiden Fälle eintreten muss, hat auch einer der beiden Spieler eine r-Gewinnstrategie.

Mit dieser Einsicht können wir nun den Haupsatz über Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele formulieren.

Satz 2.3.2 (Haupsatz über Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele)**.** *Seien $\mathcal{V}$ eine endliche Variablenmenge und w_1, w_2 $\mathcal{V}$-Strukturen. Sei weiters $r \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$w_1 \sim_r w_2 \Leftrightarrow PII \text{ hat } r\text{-Gewinnstrategie auf } (w_1, w_2).$$

Beweis.
Angenommen es gilt $w_1 \sim_r w_2$. Wir zeigen per vollständiger Induktion über r, dass PII eine r-Gewinnstrategie besitzt.
Induktionsanfang: r=0
Es gilt: $\forall \phi : c(\phi) = 0 \Rightarrow w_1 \models \phi \Leftrightarrow w_2 \models \phi$. Das heißt PII hat nach 0 Runden gewonnen und damit auch eine 0-Gewinnstrategie.
Induktionshypothese:
$w_1 \sim_{r-1} w_2 \Rightarrow PII$ hat $(r-1)$-Gewinnstrategie.
Induktionsschritt: $r > 0$
Angenommen die Implikation wäre falsch, also gilt $w_1 \sim_r w_2$ und PII hat keine r-Gewinnstrategie. Dann folgt aus den obigen Überlegungen, dass PI eine r-Gewinnstrategie besitzt. PI macht nun den ersten Zug seiner Gewinnstrategie o.B.d.A. auf der Struktur w_1 und PII damit den ersten Zug auf w_2. Wir bezeichnen die resultierenden Strukturen als w_1' und w_2'. Von nun an kann der restliche Spielverlauf auf (w_1', w_2') als $(r-1)$-Runden Spiel aufgefasst werden, bei dem PI eine und daher PII keine $(r-1)$-Gewinnstrategie besitzt. Aus der Induktionshypothese folgt also $w_1' \not\sim_{r-1} w_2'$.
Wir definieren nun $T := \{\phi : c(\phi) < r \text{ und } w_1' \models \phi\}$. Diese Menge ist wegen Proposition 2.2.2 endlich. Wir können also ohne Einschränkung die Konjunktion

dieser Formeln bilden:

$$\psi := \bigwedge_{\phi \in T} \phi.$$

Es gilt $c(\psi) < r$ und $w'_1 \models \psi$. Daraus folgt $w'_2 \not\models \psi$. Da PII den Stein z_1 beliebig gesetzt hat, gilt

$$w_1 \models \exists z_1 \psi \text{ und } w_2 \not\models \exists z_1 \psi.$$

Was einen Widerspruch zu $w_1 \sim_r w_2$ darstellt.

Für die andere Richtung der Äquivalenz nehmen wir an das PII eine r-Gewinnstrategie besitzt und beweisen die Implikation wieder per vollständige Induktion über r.
Induktionsanfang: r=0
PII hat 0-Gewinnstrategie, das heißt $w_1 \sim_0 w_2$.
Induktionshypothese:
PII hat $(r-1)$-Gewinnstrategietrategie $\Rightarrow w_1 \sim_{r-1} w_2$.
Induktionsschritt: $r > 0$
Angenommen PII hat eine r-Gewinnstrategietrategie und $w_1 \not\sim_r w_2$. Daraus folgt, dass es eine Formel ψ gibt mit $c(\psi) = r$, sodass

$$w_1 \models \psi \text{ und } w_2 \not\models \psi.$$

Wir können annehmen, dass es eine Formel ϕ gibt mit $c(\phi) = r-1$ und $\psi = \exists z_1 \phi$. PI kann seinen ersten Spielstein nun derart auf w_1 platzieren, dass $w'_1 \models \phi$ gilt. PII folgt mit seinem ersten Zug seiner Gewinnstrategie. Es gilt $w'_2 \not\models \phi$ aber laut Annahme hat PII eine $(r-1)$-Gewinnstrategie auf (w'_1, w'_2) womit aus der Induktionshypothese $w'_1 \sim_{r-1} w'_2$ folgt. Widerspruch. □

Dieses Resultat ist der Schlüssel zu allen weiteren besprochenen Hauptresultaten. Wir werden uns nun mit konkreten Anwendungen der Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele beschäftigen.

3 Anwendung auf $FO[<]$

Wir beschäftigen uns zuerst mit $FO[<]$, der Menge aller Sprachen die von prädikatenlogischen Formeln erster Ordnung definiert werden können und in denen nur die $<$ Relation als einziges numerisches Prädikat auftritt. Wir interpretieren diese Relation im üblichen Sinne, dementsprechend bedeuted die Formel $\exists x \exists y (x < y)$, dass es zwei verschiedene Stellen im Wort gibt, also das Wort aus mindestens zwei Buchstaben besteht. Wir zeigen, dass die Logik erster Stufe mit $<$ keine besonders große Ausdrucksstärke besitzt.

Satz 3.1.1.
Sei A ein Alphabet und $L = \{w \in A^* : |w| \in 2\mathbb{N}\}$ die Sprache die aus allen Wörtern mit gerader Länge besteht. L liegt nicht in $FO[<]$.

Beweis.
Wir beweisen den Satz per Widerspruchsbeweis. Angenommen es gibt eine Formel ϕ erster Stufe, deren einziges numerisches Prädkat $x < y$ ist, die die Sprache L definiert, also $L = L_\phi$. Für ein $a \in A$ gilt also

$$a^k \models \phi \Leftrightarrow k \in 2\mathbb{N}.$$

Wir zeigen $a^{2^r} \sim_r a^{2^r-1}$ für alle $r > 0$. Sei nun $c \geq 0$ die Komplexität von ϕ, dann erfüllt $a^{2^{r'}}$ mit $r' > c$ sicher ϕ und daher muss auch $a^{2^{r'}-1}$ die Formel ϕ erfüllen. Daraus folgt, dass auch ein Wort ungerader Länge in L_ϕ existiert, was einen Widerspruch zur Annahme darstellt.
Wir verwenden den Haupsatz über Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele 2.3.2. Demnach müssen wir lediglich zeigen, dass für alle $k \geq 2^r - 1$ PII eine r-Gewinnstrategie auf (a^k, a^{k+1}) besitzt. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass wir die Aussage für alle $k \geq 2^r - 1$ zeigen, um einen Induktionsbeweis zu ermöglichen.

Wir beweisen wie angekündigt per vollständiger Induktion über r:
Induktionsanfang: r=1
Es gilt $k \geq 1$ und somit kann PII auf jeden Spielzug von PI derart antworten, sodass er gewinnt und hat daher eine 1-Gewinnstrategie.
Induktionshypothese:
Sei $k \geq 2^{r-1} - 1$, dann hat PII eine $(r-1)$-Gewinnstrategie in (a^k, a^{k+1}).
Induktionsschritt: $r > 1$

1.1 PI legt seinen Spielstein z_1 auf eines der Wörter. Wir erhalten:

$$(a, \emptyset)^s (a, \{z_1\})(a, \emptyset)^t.$$

Es gilt $s+t+1 = k$ oder $s+t+1 = k+1$ woraus folgt, dass abhängig davon in welche Hälfte des Wortes PI seinen Stein gesetzt hat, gilt entweder $s \leq \frac{k-1}{2}$ oder $t \leq \frac{k-1}{2}$. O.B.d.A. nehmen wir ersteres an.

1.2 PII legt seinen Spielstein z_1 auf den $(s+1)$-ten Buchstaben des anderen Wortes. Wir erhalten:

$$(a, \emptyset)^s (a, \{z_1\})(a, \emptyset)^{t'}.$$

Wobei abhängig davon auf welches Wort PI gesetzt hat entweder $t' = t+1$ oder $t' = t-1$ gilt.

Wir folgern nun

$$k \geq 2^r - 1 \Rightarrow k - 1 \geq 2^r - 2 \Rightarrow \frac{k-1}{2} \geq 2^{r-1} - 1$$

und

$$2\min\{t, t'\} + 1 \geq k \Rightarrow 2\min\{t, t'\} \geq k - 1 \Rightarrow \min\{t, t'\} \geq \frac{k-1}{2}.$$

Daraus folgt unmittelbar $\min\{t, t'\} \geq \frac{k-1}{2}$ und mit der Induktionshypothese, dass PII auf $(a^t, a^{t'})$ eine $(r-1)$-Gewinnstrategie besitzt.

Mit Hilfe dieser Gewinnstrategie beschreiben wir nun die r-Gewinnstrategie von PII auf (a^k, a^{k+1}). Wir legen folgendes Verhalten von PII fest, wenn PI auf den i-ten Buchstaben von einem der beiden Wörter setzt.

- $i \leq s+1$: PII setzt auf den i-ten Buchstaben des anderen Worts.
- $i > s+1$: PII setzt gemäß seiner $(r-1)$-Gewinnstrategie auf $(a^t, a^{t'})$.

Wir erhalten am Ende des Spiels zwei Wörter w_1' und w_2'. Aufgrund des Spielverhaltens von PII sind die ersten $s+1$ Buchstaben von diesen Wörtern gleich. Wir bezeichnen v_1' bzw. v_2' als jene Wörter, die man erhält, wenn man jeweils die ersten $s+1$ Buchstaben von w_1' bzw. w_2' löscht. Die Wörter v_1' und v_2' resultieren aus $r' < r-1$ Runden der $(r-1)$-Gewinnstrategie von PII auf $(a^t, a^{t'})$. Es gilt daher $v_1' \sim_0 v_2'$. Nun betrachten wir nun die Atomformeln um auch $w_1' \sim_0 w_2'$ zu zeigen.

Für Atomformeln der Form $Q_b(x)$ gilt:

$$\forall j \in \{1, ..., r\} : w_1' \vDash Q_a(z_j) \text{ und } w_2' \vDash Q_a(z_j).$$

Also erfüllen beide Wörter genau dann diese Formeln wenn $b = a$.

Für Atomformeln der Form $x < y$ folgt aus $w_1' \vDash z_i < z_j$:

- Wenn z_i und z_j in den ersten $s+1$ Buchstaben von w_1' gesetzt wurden, so folgt, dass die Variablen in beiden Wörter jeweils an der selben Stellen auftreten. Damit folgt auch $w_2' \vDash z_i < z_j$.
- Wenn z_i und z_j nach dem $s+1$-ten Buchstaben von w_1' gesetzt wurden, so folgt $v_1' \vDash z_i < z_j$ und daraus $v_2' \vDash z_i < z_j$. Damit folgt auch $w_2' \vDash z_i < z_j$.
- Wenn z_i auf einen ersten $s+1$ und z_j nach dem $s+1$-ten Buchstaben von w_1' gesetzt wurden, so gilt dies auch für w_2' und es folgt $w_2' \vDash z_i < z_j$.

Die andere Richtung der Argumentation funktioniert analog. Damit hat PII eine Gewinnstrategie.

□

Einer der Konsequenzen aus diesem Resultat ist folgendes Korollar. $SOM[+1]$ ist die Menge aller Sprachen die mit monadischen Formeln zweiter Stufe definiert werden können, in denen als einziges numerisches Prädikat $y = x+1$ vorkommt.

Korollar 3.1.2. *$FO[<]$ ist echte Teilmenge von $SOM[+1]$.*

Beweisskizze:
Man zeigt zuerst, dass man mit monadischen Formeln zweiter Stufe mit $y = x+1$ das Prädikat $x < y$ beschreiben kann und daher die Inklusion gilt. Die strikte Inklusion erhält man, weil $SOM[+1]$ genau die Menge aller regulären Sprachen beschreibt [1] und wir gerade gezeigt haben, dass die Sprache mit den Wörtern gerader Länge, welche eine reguläre Sprache ist, nicht in $FO[<]$ liegt.

4 Anwendung auf $FO[+1]$

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Resultate über die der Menge $FO[+1]$ wiedergegeben. $FO[+1]$ ist die Menge aller Sprachen, die von einer prädikatenlogischen Formel erster Stufe in der als einziges numerisches Prädikat $y = x + 1$ vorkommt, definiert werden können. Im Gegensatz zu $FO[<]$ ist es für $FO[+1]$ sogar möglich eine Charakterisierung dieser Sprachen anzugeben. Für die Beweise wird auf [1] verwiesen.

Sei A ein Alphabet und $w, v \in A^*$, wobei w ein nichtleeres Wort ist. Wir bezeichnen mit $Faktor(w, v)$ die Anzahl an Vorkommnissen von v in w. Wir definieren nun für $k, r > 0$ Äquivalenzrelationen auf A^*. Für alle $w_1, w_2 \in A^*$ gilt

$$w_1 \approx_r^k w_2 :\Leftrightarrow w_1 = w_2$$

wenn $|w_1| < k$ und sonst

$$w_1 \approx_r^k w_2 :\Leftrightarrow w_1, w_2 \text{ erfüllen (1), (2) und (3).}$$

1. w_1, w_2 haben die selben $k - 1$ ersten Buchstaben.
2. w_1, w_2 haben die selben $k - 1$ letzten Buchstaben.
3. Für alle nichtleeren Wörte $v \in A^*$ mit $|v| \leq k$ gilt entweder
   - $Faktor(w_1, v) = Faktor(w_2, v) < r$ oder
   - $Faktor(w_1, v) \geq r$ und $Faktor(w_2, v) \geq r$.

Eine Sprache heißt nun lokal-schwellenwert-testbar wenn es $k, r > 0$ gibt, sodass sie als Vereinigung von $\approx_r^k$-Äquivalenzklassen dargestellt werden kann. Mit dieser Terminologie können wir nun eine Charakterisierung für $FO[+1]$ angeben.

Satz 4.1.1. *Eine Sprache L liegt genau dann in $FO[+1]$ wenn sie lokal-schwellenwert-testbar ist.*

Beweisskizze:
Um zu zeigen, dass jede lokal-schwellenwert-testbare Sprache auch in $FO[+1]$ liegt reicht es zu zeigen, dass jede $\approx_r^k$-Äquivalenzklasse in $FO[+1]$ liegt. Man muss also folgende Aussagen mit Formeln erster Stufe in denen $y = x + 1$ als einziges numerische Prädikat vorkommt beschreiben:

- „Die ersten $k - 1$ Buchstaben von w ergeben das Wort $v = a_1 \dots a_{k-1}$" wird folgendermaßen überesetzt:

$$\exists x_1 \dots \exists x_{k-1} \Big(\bigwedge_{i=1}^{k-2} (x_{i+1} = x_i + 1) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k-1} Q_{a_i}(x_i) \wedge first(x_1) \Big).$$

- Analog übersetzt man „Die letzten $k - 1$ Buchstaben von w ergeben das Wort $v = a_1 \dots a_{k-1}$." Statt dem Prädikat $first(x)$[2] verwenden wir das Prädikat $last(x)$[3].

[2] $first(x)$ ist eine Abkürzung für $\neg\exists y(x = y + 1)$
[3] $last(x)$ ist eine Abkürzung für $\neg\exists y(y = x + 1)$

- Für $s > 0$ und $v = a_1 \dots a_l$ mit $l \leq k$ wird „$\mathit{Faktor}(w, v) \leq s$“ folgendermaßen übersetzt:

$$\begin{aligned}\exists x_{1,1} \exists x_{1,2} \dots \exists x_{1,l} \exists x_{2,1} \dots \exists x_{s,l} \Big(& \bigwedge_{i=1}^{s} \bigwedge_{j=1}^{l-1} (x_{i,j+1} = x_{i,j} + 1) \wedge \\ & \bigwedge_{1 \leq i < j \leq s} (x_{i,1} \neq x_{j,1}) \wedge \\ & \bigwedge_{i=1}^{s} \bigwedge_{j=1}^{l} Q_{a_i}(x_{i,j}) \Big).\end{aligned}$$

Alle weiteren benötigten Formeln können aus den obigen konstruiert werden. Nun können $\approx_r^k$-Äquivalenzklasse mit diesen Formeln beschrieben werden und liegen daher in $FO[+1]$.
Die verbleibende Implikation beweist man indem man zuerst zeigt, dass für zwei Wörter w_1, w_2 und $R = 3^r$ mit $r \geq 0$ gilt

$$w_1 \approx_{3R}^{R} w_2 \Rightarrow w_1 \sim_r w_2.$$

Hierfür zeigt man, dass PII eine r-Gewinnstrategie auf (w_1, w_2) besitzt wenn $w_1 \approx_{3R}^{R} w_2$ gilt. Mit dem Satz 2.3.2 folgt daraus, dass $w_1 \sim_r w_2$ gilt. Aus der gezeigten Implikation folgt, dass die $\approx_{3R}^{R}$ Relation A^* feiner partitioniert als $\sim_r$ und insbesondere jede $\sim_r$-Äquivalenzklasse als Vereinigung von $\approx_{3R}^{R}$-Klassen dargestellt werden kann. Eine Sprache $L \in FO[+1]$ kann als Vereinigung von $\sim_r$-Klassen und daher auch als Vereinigung von $\approx_{3R}^{R}$-Äquivalenzklassen dargestellt werden. Dies entspricht der Definition von lokal-schwellenwert-testbar.

Korollar 4.1.2. *$FO[+1]$ ist echte Teilmenge von $FO[<]$.*

Beweis.
Sei $A = \{a, b, c\}$ und $L = a^*ba^*ca^*$. Es gilt $L \in FO[<]$, da folgende Formel die Sprache beschreibt

$$\exists x \exists y \big((x < y) \wedge Q_b(x) \wedge Q_c(y) \wedge \forall z ((z \neq x \wedge y \neq y) \rightarrow Q_a(z)) \big).$$

Wir zeigen nun, dass $L \in FO[+1]$ auf einen Widerspruch führt. Laut Satz 4.1.1 is L lokal-schwellenwert-testbar. Es gibt daher $k, r > 0$, sodass L als Vereinigung von $\approx_r^k$-Klassen dargestellt werden kann. Es gilt aber

$$a^k b a^k c a^k \approx_k^r a^k c a^k b a^k.$$

Damit müsste auch das Wort $a^k c a^k b a^k$ in L liegen, ein Widerspruch. □

Korollar 4.1.3. *Die Relation $x < y$ kann nicht von einer Formel aus $FO[+1]$ beschrieben werden.*

Literatur

[1] H. Straubing. *Finite Automata, Formal Logic, and Circuit Complexity.* Birkhauser Verlag, Basel, Switzerland, 1994.