# Saturiertheit

*von Johannes Kloibhofer*

Diese Seminararbeit ist im Rahmen des Seminars aus Logik im Wintersemester 2020 auf der TU Wien unter der Anleitung von Professor Stefan Hetzl entstanden.
Inhaltlich basiert diese Arbeit auf Kapitel 11 aus *Models of Peano Arithmetic* von Richard Kaye, siehe [2]. Im ersten Abschnitt werden wird die von einem Modell codierten Mengen betrachten, insbesondere wird sich herausstellen, dass ein Nichtstandardmodell von PA alle rekursiven Mengen codiert.
In Abschnitt 3 definieren wir $\Sigma_n$-rekursive Saturiertheit, als Resultat erhalten wir, dass alle Nichtstandardmodelle von PA $\Sigma_n$-rekursiv saturiert sind.
Das Hauptresultat ist der Satz von Tennenbaum. Dieser besagt, dass jedes Nichtstandardmodel der Peano-Arithmetik nicht rekursiv ist. Dies bedeutet eine Einschränkung, um Nichtstandardmodelle der Peano-Arithmetik konkret angeben zu können.

## Inhaltsverzeichnis

## 1 Vorbemerkungen

Wir werden ähnliche Notation wie in [2] verwenden. Bei Leserin und Leser werden grundlegendes Wissen über Logik sowie Definition und Hauptresultate der Kapitel 1 - 10 von [2] vorausgesetzt. Insbesondere werden wir Gödelisierung und den Gödelschen Unvollständigkeitssatz verwenden.

In dieser Arbeit arbeiten wir ausschließlich in der Sprache der Arithmetik $\mathcal{L}_A = \{+, \cdot, <, 0, 1\}$ mit binären Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$, einer binären Relation $<$ und Konstantensymbolen 0 und 1. Wir werden die $\mathcal{L}_A$-Theorien $\mathrm{PA}^-$ sowie $I\Delta_n$, $I\Sigma_n$ und $I\Pi_n$ für $n \in \mathbb{N}$ behandeln. Zuletzt sei PA die $\mathcal{L}_A$-Theorie der Peano-Arithmetik. Das Standardmodell $\mathbb{N}$ ist ein Modell all dieser Theorien, wir werden uns aber insbesondere für Nichtstandardmodelle, also zu $\mathbb{N}$ verschiedene Modelle, interessieren.

Wir möchten an die Formel $(x)_y = z$ erinnern. Diese beschreibt, dass $x$ ein Tupel codiert, wo an der $y$-te Stelle $z$ steht. In [1] und [2] wurden verschiedene Arten behandelt, diese Codierung zu definieren. Für unsere Zwecke ist die genaue Definition nicht wichtig, solange die Formel $(x)_y = z$ Lemma 5.8. aus [2] erfüllt. In Abschnitt 4 werden wir aber eine für uns nützliche Codierung verwenden: Wir definieren

$$(x)_y \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{pr}(y) | x,$$

wobei $\mathrm{pr}(y)$ die $y$-te Primzahl und $a|b$ die Relation $\exists k \leq b (a \cdot k = b)$ bezeichnet. Diese Definition hat alle Eigenschaften, die wir von einer Codierung erwarten, für eine genaue Beschreibung siehe [2].

## 2 Codierte Mengen

In diesem Abschnitt werden wir uns mit den codierten Mengen eines Modells beschäftigen. Es wird sich herausstellen, dass jedes Nichtstandardmodell von PA alle rekursiven Mengen, sowie mindestens eine nicht rekursive Menge codiert.

**Definition 2.1.** *Sei $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}$ und $a \in M$. Die von $a$ in $\mathcal{M}$* codierte Menge *ist die Menge $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{M} \models (a)_n \neq 0\}$. $\mathcal{M}$ codiert eine Menge $S \subseteq \mathbb{N}$, falls es ein $a \in M$ gibt, sodass $S$ die von $a$ in $\mathcal{M}$ codierte Menge ist. Das* Standardsystem *von $\mathcal{M}$, geschrieben $\mathrm{SSy}(\mathcal{M})$, ist die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, die in $\mathcal{M}$ codiert werden, also*

$$\mathrm{SSy}(\mathcal{M}) = \{S \subseteq \mathbb{N} \mid S = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{M} \models (a)_n \neq 0\} \text{ für ein } a \in M\}.$$

Wir wollen die Definition eines Typs von [2, Chapter 8] wiederholen. Ein *Typ* über einer Theorie $T$ ist eine Menge $p(\bar{x})$ von Formeln in endlich vielen Variablen $\bar{x}$, sodass $T \cup p(\bar{x})$ konsistent ist[1]. Ein Modell $\mathcal{M} \models T$ realisiert einen

[1] Dies soll bedeuten, dass $T \cup \{\varphi(\bar{c}) \mid \varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})\}$ konsistent ist, wobei $\bar{c}$ ein Tupel von neuen Konstanten ist.

Typ $p(\bar{x})$, wenn es $\bar{a} \in M$ gibt[2], sodass $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$ für alle $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$. Für diesen Abschnitt wird diese Definition reichen, in Abschnitt 3 wird diese dann erweitert, um auch über einen Typ über einem Modell sprechen zu können.

**Lemma 2.2.** *Ist $S \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv, so wird $S$ in allen Nichtstandardmodellen von* PA *codiert.*

*Beweis.* Sei $\mathcal{M} \models PA$ ein Nichtstandardmodell und $S \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv. Definiere den Typ

$$p(x) = \{(x)_n \neq 0 \mid n \in S\} \cup \{(x)_n = 0 \mid n \notin S\}.$$

$\mathcal{M}$ codiert $S$ genau dann, wenn $\mathcal{M}$ den Typ $p(x)$ realisiert. Da $S$ rekursiv ist, gibt es eine $\Sigma_1$-Formel $\theta(x)$, sodass

$$n \in S \Leftrightarrow PA^- \vdash \theta(n) \quad \text{und} \quad n \notin S \Leftrightarrow PA^- \vdash \neg\theta(n),$$

siehe [2, Corollary 3.7.]. Also ist $p(x)$ in $\mathcal{M}$ genau dann realisiert, wenn

$$q(x) = \{(x)_n \neq 0 \leftrightarrow \theta(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

realisiert ist. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{M} \models \exists x \forall n < k((x)_n \neq 0 \leftrightarrow \theta(n)),$$

und mit dem Overspill-Lemma bekommen wir $b > \mathbb{N}$ in $\mathcal{M}$, sodass

$$\mathcal{M} \models \exists x \forall n < b((x)_n \neq 0 \leftrightarrow \theta(n)).$$

Es gibt also $a \in \mathcal{M}$, sodass $\mathcal{M} \models \forall n < b((a)_n \neq 0 \leftrightarrow \theta(n))$, $a$ codiert also $S$. $\square$

Im Gegensatz dazu gilt das nächste Lemma, für den Beweis benötigen wir folgende Definitionen aus [2, Chapter 8]:
Sei $\mathcal{M} \models$ PA. Ein Element $b$ ist definierbar in $\mathcal{M}$, wenn es eine $\mathcal{L}_A$-Formel $\theta$ gibt, sodass $\mathcal{M} \models \exists! x\theta(x)$ und $b$ dieses eindeutige Element ist, also $\mathcal{M} \models \theta(b)$. Sei $T$ eine vollständige, konsistente Theorie, die PA erweitert und $\mathcal{M} \models T$. Dann ist das Primmodell von $T$, abgekürzt $K_T$, die Menge aller in $\mathcal{M}$ definierbaren Elemente. Mit der natürlichen Interpretation induziert von $\mathcal{M}$ ist $K_T$ ein Modell, sodass $K_T \models T$. Es sei erwähnt, dass diese Definition nicht von der Wahl von $\mathcal{M}$ abhängt.

**Lemma 2.3.** *Ist $S \subseteq \mathbb{N}$ nicht rekursiv, so gibt es ein Nichtstandardmodell $\mathcal{M} \models$ PA, sodass $S$ nicht in $\mathcal{M}$ codiert wird.*

[2] Für ein Tupel $\bar{a} = (a_1, ..., a_n)$ ist $\bar{a} \in M$ als Abkürzung von $a_j \in M$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$ zu verstehen.

*Beweis.* Sei $\sigma_0, \sigma_1, ...$ eine Aufzählung aller $\mathcal{L}_A$-Sätze. Wir werden eine vollständige Erweiterung $T \neq \mathrm{Th}(\mathbb{N})$ von PA konstruieren, sodass $S$ nicht in $K_T$ codiert wird. Dafür werden wir $\mathcal{L}_A$-Sätze $\tau_i$ wählen, sodass $T = \mathrm{PA} \cup \{\tau_0, \tau_1, ...\}$.
Wir wählen den ersten Satz $\tau_0$, sodass $\mathrm{PA} + \tau_0$ konsistent ist und $\mathbb{N} \not\models \tau_0$. Dadurch muss $T \neq \mathrm{Th}(\mathbb{N})$ gelten und dadurch $K_T \neq \mathbb{N}$.
Nun gehen wir induktiv vor: Angenommen $T_i = \mathrm{PA} \cup \{\tau_0, ..., \tau_i\}$ wurde definiert und ist konsistent. Ist $\sigma_i$ nicht von der Form $\exists x \varphi(x)$, dann definiere $\tau_{i+1}$ gleich $\sigma_i$ oder $\neg\sigma_i$, so dass $T_i + \tau_{i+1}$ konsistent ist.
Andernfalls ist $\sigma_i$ von der Form $\exists x \varphi(x)$. Ist $T_i + \neg\sigma_i$ konsistent, so definiere $\tau_{i+1}$ als $\neg\sigma_i$. Im anderen Fall ist $T_i + \sigma_i$ konsistent, da $T_i$ konsistent ist. Nähme man hier an, dass

$$\begin{aligned} T_i + \varphi(x) &\vdash (x)_j = 0 \quad \text{für alle} \quad j \notin S \quad \text{und} \\ T_i + \varphi(x) &\vdash (x)_j \neq 0 \quad \text{für alle} \quad j \in S, \end{aligned}$$

dann wäre $S$ rekursiv. Dies gilt, da wir entscheiden könnten ob $j \in S$, indem wir den ersten Beweis suchen, der $(x)_i = 0$ oder $(x)_i \neq 0$ in der Theorie $T_i + \varphi(x)$ beweist. Dies ist eine rekursiv aufzählbar axiomatisierte Theorie, die PA erweitert. Da $S$ nicht rekursiv ist, ist

$$T_i + \exists x(\varphi(x) \wedge (x)_j \neq 0)$$

konsistent für ein $j \notin S$ oder

$$T_i + \exists x(\varphi(x) \wedge (x)_j = 0)$$

ist konsistent für ein $j \in S$. Nun sei $\tau_{i+1}$ einer der beiden Sätze, sodass $T_i + \tau_{i+1}$ konsistent ist.
Wir haben nun eine vollständige konsistente Theorie $T = \mathrm{PA} + \{\tau_0, \tau_1, ...\}$ konstruiert, die PA erweitert. Sei nun $a \in K_T$, $a$ ist also durch eine $\mathcal{L}_A$-Formel $\varphi(x)$ definiert, also $T \vdash \exists! x \varphi(x)$. Insbesondere ist $\exists x \varphi(x)$ gleich $\varphi_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ und $T \vdash \exists x \varphi(x)$. Nach unserer Konstruktion ist $\tau_{i+1}$ definiert als

$$\exists x(\varphi(x) \wedge (x)_j \neq 0) \quad \text{für ein} \quad j \notin S,$$

oder als

$$\exists x(\varphi(x) \wedge (x)_j = 0) \quad \text{für ein} \quad j \in S.$$

Da $K_T \models \tau_{i+1}$, kann $a$ nicht die Menge $S$ codieren. Dies gilt für alle $a \in K_T$ und dadurch $S \notin \mathrm{SSy}(K_T)$. □

**Korrolar 2.4.** *Eine Menge $S \subseteq \mathbb{N}$ ist rekursiv genau dann wenn $S$ in allen Nichtstandardmodellen von* PA *codiert wird.*

*Beweis.* Nach Lemma 2.2 wird jedes rekursive $S$ in allen Nichtstandardmodellen von $\mathbb{N}$ codiert. Ist $S$ nicht rekursiv, so gibt es nach Lemma 2.3 ein Nichtstandardmodell von $\mathcal{M}$, das $S$ nicht codiert. □

Wir erinnern an die Formel $\mathrm{Sat}_{\Pi_n}(x, \bar{y})$ von [2, Chapter 9]. Diese beschreibt eine Relation, sodass $\mathcal{M} \models \mathrm{Sat}_{\Pi_n}(x, \bar{y})$ genau dann, wenn $x$ der Code einer $\Pi_n$-Formel $\varphi(\bar{v})$ ist und $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{y})$ gilt. Analog wird $\mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(x, \bar{y})$ definiert. Wichtig ist, dass $\mathrm{Sat}_{\Pi_n}$ eine $\Pi_n$-Formel ist und $\mathrm{Sat}_{\Sigma_n}$ eine $\Sigma_n$-Formel ist.

**Lemma 2.5.** *Jedes Nichtstandardmodell von* PA *codiert eine nicht rekursive Menge $S$.*

*Beweis.* Mit Induktion kann man zeigen, dass

$$\mathrm{PA} \vdash \forall x \exists y \forall z < x((y)_z \neq 0 \leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Pi_1}(z, 0)).$$

Sei nun $\mathcal{M}$ ein Nichtstandardmodell und $b \in \mathcal{M}$ nichtstandard. Dann existiert $a \in \mathcal{M}$, sodass

$$\mathcal{M} \models \forall z < b((a)_z \neq 0 \leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Pi_1}(z, 0)).$$

Das Element $a$ codiert also die Menge der Codierungen[3] von $\Pi_1$-Formeln $\varphi(\bar{v})$, welche in $\mathcal{M}$ für $\bar{v} = 0$ wahr sind. Diese Menge ist nach dem Unvollständigkeitssatz nicht rekursiv. Dies folgt, da der im Beweis des Unvollständigkeitssatz konstruierte "Gödelsatz" eine $\Pi_1$-Formel ist. $\square$

# 3 $\Sigma_n$-rekursive Saturiertheit

**Definition 3.1.** *Sei $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}^-$. Ein* Typ *über $\mathcal{M}$ ist eine Menge $p(\bar{x})$ von Formeln $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ in $\mathcal{L}_A \cup \{\bar{a}\}$, wobei $\bar{x}$ ein festes endliches Tupel von freien Variablen ist und $\bar{a}$ ein festes endliches Tupel von Parametern ist (d.h. für $a_i \in \bar{a} = (a_1, ..., a_m)$ ist $a_i \in M$ und $a_i$ ist ein Konstantensymbol in der erweiterten Sprache $\mathcal{L}_A \cup \{\bar{a}\}$ mit der natürlichen Interpretation in $\mathcal{M}$), sodass $p(\bar{x})$* endlich erfüllbar *in $\mathcal{M}$ ist, also*

$$\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i(\bar{x}, \bar{a})$$

*für jede endliche Teilmenge $\{\varphi_1, ..., \varphi_k\}$ von $p(\bar{x})$.*

*Ein Typ $p(\bar{x})$ über $\mathcal{M}$ ist*

- *ein $\Sigma_n$-Typ, wenn alle $\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p(\bar{x})$ in $\Sigma_n$ sind. Analog ist $p(\bar{x})$ ein $\Pi_n$-Typ, wenn alle $\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p(\bar{x})$ in $\Pi_n$ sind.*

- rekursiv*, wenn die Menge*

  $$\{\ulcorner \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \urcorner \mid \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p(\bar{x})\} \subseteq \mathbb{N}$$

  *rekursiv ist, wobei $\bar{y}$ ein festes, zu $\bar{x}$ disjunktes, Tupel von Variablen in $\mathcal{L}_A$ ist, welches für die Parameter $\bar{a}$ substituiert wird.*

[3] auch Gödelnummern genannt.

- vollständig*, wenn es für alle Formeln $\psi(\bar{x}, \bar{a})$ mit den gleichen freien Variablen $\bar{x}$ und Parametern $\bar{a}$ wie $p(\bar{x})$ eine endliche Teilmenge $\{\varphi_1, ..., \varphi_k\}$ von $p(\bar{x})$ gibt, sodass*

$$\mathcal{M} \models \forall \bar{x}(\varphi_1(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \cdots \wedge \varphi_k(\bar{x}, \bar{a}) \rightarrow \psi(\bar{x}, \bar{a})) \quad \textit{oder}$$
$$\mathcal{M} \models \forall \bar{x}(\varphi_1(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \cdots \wedge \varphi_k(\bar{x}, \bar{a}) \rightarrow \neg\psi(\bar{x}, \bar{a})).$$

- realisiert*, wenn es $\bar{b} \in M$ gibt, sodass $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{b}, \bar{a})$ für alle $\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p(\bar{x})$.*

Diese Definition erweitert die Definition eines Typs über einer Theorie in dem Sinne, dass $p(\bar{x})$ ein Typ über dem Modell $\mathcal{M}$ mit Parametern $\bar{a} \in M$ ist, genau dann wenn $p(\bar{x})$ ein Typ über der Theorie $\mathrm{Th}(\mathcal{M}, \bar{a})$ ist, also der Theorie des Modells $\mathcal{M}$ erweitert mit den Konstantensymbolen $\bar{a}$. Dies lässt sich mit dem Kompaktheitssatz zeigen.

**Definition 3.2.** *Ein Modell $\mathcal{M} \models PA^-$ ist* $\Sigma_n$-rekursiv saturiert*, wenn jeder rekursive $\Sigma_n$-Typ über $\mathcal{M}$ realisiert ist. Ein Modell $\mathcal{M}$ ist* rekursiv saturiert*, wenn jeder rekursive Typ über $\mathcal{M}$ realisiert ist.*

**Satz 3.3.** *Alle Nichtstandardmodelle von* PA *sind $\Sigma_n$-rekursiv saturiert für alle $n \in \mathbb{N}$.*

*Beweis.* Sei $\mathcal{M}$ ein Nichtstandardmodell von PA. Sei $p(\bar{x})$ ein rekursiver $\Sigma_n$-Typ über $\mathcal{M}$ mit Parametern $\bar{a} \in \mathcal{M}$. Die Menge

$$S = \{\ulcorner \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \urcorner \mid \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p(\bar{x})\}$$

ist rekursiv, also gibt es nach Lemma 2.2 ein $c \in \mathcal{M}$, welches $S$ codiert. Da $p(\bar{x})$ endlich erfüllt ist, gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \forall y < k((c)_y \neq 0 \rightarrow \mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(y, [\bar{x}, \bar{a}])).$$

Nach dem Overspill-Lemma gibt es daher ein $d > \mathbb{N}$, sodass

$$\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \forall y < d((c)_y \neq 0 \rightarrow \mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(y, [\bar{x}, \bar{a}])).$$

Sei nun $\bar{b} \in \mathcal{M}$, sodass

$$\mathcal{M} \models \forall y < d((c)_y \neq 0 \rightarrow \mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(y, [\bar{b}, \bar{a}])).$$

Für $\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p(\bar{x})$ sei $l = \ulcorner \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \urcorner < d$. Da $S$ von $c$ codiert wird, gilt $\mathcal{M} \models (c)_l \neq 0$ und daher $\mathcal{M} \models \mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(l, [\bar{b}, \bar{a}])$. Dies bedeutet aber genau $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{b}, \bar{a})$. $\square$

**Satz 3.4.** *Sei $\mathcal{M} \models$ PA ein Nichtstandardmodell und sei $S \subseteq \mathbb{N}$. Dann ist $S \in \mathrm{SSy}(\mathcal{M})$ genau dann, wenn es eine $\mathcal{L}_A$-Formel $\theta(x, \bar{y})$ und ein $\bar{a} \in \mathcal{M}$ gibt, sodass*

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{M} \models \theta(n, \bar{a})\}.$$

*Beweis.* Ist $S \in \mathrm{SSy}(\mathcal{M})$, dann ist $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{M} \models (a)_n \neq 0\}$ für ein $a \in \mathcal{M}$. Sei umgekehrt $\theta(x, \bar{y})$ eine $\mathcal{L}_A$-Formel und $\bar{a} \in \mathcal{M}$, sodass $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{M} \models \theta(n, \bar{a})\}$. Definiere den Typ über $\mathcal{M}$

$$p(x) = \{(x)_n \neq 0 \leftrightarrow \theta(n, \bar{a}) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ein $b \in \mathcal{M}$ codiert $S$ genau dann, wenn es $p(x)$ realisiert. Der Typ $p(x)$ ist rekursiv und ist $\theta$ eine $\Sigma_n$-Formel, so ist $p(x)$ ein $\Sigma_{n+1}$-Typ. Nach Satz 3.3 ist $p(x)$ realisiert und dadurch gibt es $b \in \mathcal{M}$, welches $S$ codiert. $\square$

Manche Autoren definieren $\mathrm{SSy}(\mathcal{M})$ durch

$$\mathrm{SSy}'(\mathcal{M}) = \{S \subseteq \mathbb{N} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{M} \models \theta(n, \bar{a}),\ \theta \text{ ist } \mathcal{L}_A\text{-}\textit{Formel und } \bar{a} \in \mathcal{M}\}\}.$$

Wegen Satz 3.4 stimmt diese Definition für alle Nichtstandardmodellen mit unserer überein, nicht aber für $\mathbb{N}$, denn $SSy'(\mathbb{N})$ enthält unendliche Mengen, wo hingegen $SSy(\mathbb{N})$ alle endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ definiert. Da $\mathrm{SSy}(\mathbb{N})$ kaum benutzt wird führt dies zu keinen größeren Problemen.

# 4 Satz von Tennenbaum

Nun kommen wir zum Hauptresultat dieser Seminararbeit, den Satz von Tennenbaum. Dieser besagt, dass es kein rekursives Nichtstandardmodell von PA gibt. Dies liefert eine Einschränkung um Nichtstandardmodelle konkret angeben zu können.

**Definition 4.1.** *Sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{L}_A$-Modell. Dann nennen wir $\mathcal{M}$* rekursiv*, falls es rekursive Funktionen $\oplus$, $\odot : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, eine binäre rekursive Relation $\otimes \subseteq \mathbb{N}$ und natürliche Zahlen $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass*

$$\mathcal{M} \cong (\mathbb{N}, \oplus, \odot, \otimes, n_0, n_1).$$

*Insbesondere muss $\mathcal{M}$ abzählbar sein.*

**Satz 4.2** (Satz von Tennenbaum)**.** *Sei $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}$ ein Nichtstandardmodell. Dann ist $\mathcal{M}$ nicht rekursiv. Ist $\mathcal{M} \cong (\mathbb{N}, \oplus, \odot, \otimes, n_0, n_1)$, dann ist weder $\oplus$ noch $\odot$ rekursiv.*

*Beweis.* Nach Lemma 2.5 codiert $\mathcal{M}$ eine nicht rekursive Menge $S \subseteq \mathbb{N}$, es gibt also $b \in \mathcal{M}$, sodass $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{M} \models (b)_n \neq 0\}$ nicht rekursiv ist. Betrachte den rekursiven Typ

$$p(x) = \{(b)_n \neq 0 \leftrightarrow \mathrm{pr}(n) | x,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Nach Satz 3.3 wird $p(x)$ realisiert, es gibt also $a \in \mathcal{M}$, sodass

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{M} \models \mathrm{pr}(n) | a\}.$$

Sei nun $\mathcal{M} \cong (\mathbb{N}, \oplus, \odot, \olessthan, n_0, n_1)$, wobei $\oplus$ rekursiv ist, dann können wir $S$ wie folgt berechnen:
Sei $n_a$ das Bild von $a \in \mathcal{M}$ des Isomorphismus $\mathcal{M} \cong (\mathbb{N}, \oplus, \odot, \olessthan, n_0, n_1)$. Um zu entscheiden, ob $n \in S$ gilt, berechnen wir zuerst die $n$-te Primzahl $p \in \mathbb{N}$, es gilt also $\mathrm{pr}(n) = p$. Es bleibt zu entscheiden, ob $p | n_a$. Nach Euklidischer Division, siehe [2, Theorem 5.1], gilt

$$\mathrm{PA} \vdash \forall a, b \exists! r, s (b = (a \cdot s) + r \wedge r < a).$$

Es existieren also eindeutige $r, s \in \mathbb{N}$, sodass

$$n_a = (p \odot s) \oplus r \text{ und } r \olessthan p.$$

Da $p$ eine Standardzahl ist, ist dies äquivalent zu

$$n_a = \overbrace{s \oplus s \oplus \cdots \oplus s}^{p} \oplus r \text{ und } r \olessthan p.$$

Wir suchen also in $\mathbb{N}$ nach diesen eindeutigen $r, s$. Nun ist

$$n \in S \;\Leftrightarrow\; n_a = \overbrace{s \oplus s \oplus \cdots \oplus s}^{p}.$$

Ist $\oplus$ rekursiv, so folgt also dass auch $S$ rekursiv ist, ein Widerspruch.
Um zu zeigen, dass auch $\odot$ nicht rekursiv, ist gehen wir ähnlich vor. Mit Satz 3.3 existiert ein $a \in \mathcal{M}$, sodass

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{M} \models \exists x (\overbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}^{\mathrm{pr}(n)} = a)\}.$$

Es lässt sich beweisen, dass für alle Standardzahlen $n > 0$ gilt

$$\mathrm{PA} \vdash \forall a \exists! b (\overbrace{b \cdots b}^{n} \leq a \wedge a < \overbrace{(b+1) \cdots (b+1)}^{n}).$$

Sei $n_a$ wieder das Bild von $a \in \mathcal{M}$ des Isomorphismus $\mathcal{M} \cong (\mathbb{N}, \oplus, \odot, \olessthan, n_0, n_1)$, es existiert ein eindeutiges $b \in \mathbb{N}$, sodass[4]

$$\overbrace{b \odot \cdots \odot b}^{\mathrm{pr}(n)} \circledleq n_a \text{ und } n_a \olessthan \overbrace{(b+1) \odot \cdots \odot (b+1)}^{\mathrm{pr}(n)}.$$

Nun können wir dieses eindeutige $b \in \mathbb{N}$ suchen, dann gilt

$$n \in S \;\Leftrightarrow\; n_a = \overbrace{b \odot \cdots \odot b}^{\mathrm{pr}(n)}.$$

Wäre $\odot$ rekursiv, so würde demnach folgen, dass $S$ rekursiv ist, der gewünschte Widerspruch.

□

[4] Wie üblich ist $x \circledleq y$ eine Abkürzung für $x \olessthan y \vee x = y$.

Im vorigen Beweis wurde unter anderem $\Delta_1$-Induktion verwendet um zu zeigen, dass $\mathcal{M}$ eine nicht rekursive Menge codiert, es muss also zumindest angenommen werden, dass $\mathcal{M} \models I\Delta_1$. Wir wollen nun aber den Satz von Tennenbaum für noch allgemeinere Modelle beweisen, dafür benötigen wir die folgende Definition:

**Definition 4.3.** *Seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$ zwei disjunkte Mengen. Wir nennen $A$ und $B$* rekursiv untrennbar*, falls es kein rekursives $C \subseteq \mathbb{N}$ gibt, sodass $C \subseteq A$ und $C \cap B = \varnothing$.*

Zuerst sei angemerkt, dass diese Definition symmetrisch ist, da $C$ rekursiv ist, genau dann wenn $\mathbb{N} \setminus C$ rekursiv ist.
Die Existenz von rekursiv untrennbaren Mengen ist a priori nicht klar, wir erhalten aber welche als Folgerung des Unvollständigkeitssatzes: Definiere die rekursiv aufzählbaren Mengen

$$A = \{\ulcorner\sigma\urcorner \mid \sigma \text{ ist } \mathcal{L}_A\text{-Satz und } \mathrm{PA}^- \vdash \sigma\}$$
$$B = \{\ulcorner\sigma\urcorner \mid \sigma \text{ ist } \mathcal{L}_A\text{-Satz und } \mathrm{PA}^- \vdash \neg\sigma\}$$

Sei nun $C$ eine Menge, sodass $A \subseteq C$ und $C \cap B = \varnothing$. O.B.d.A nehmen wir an, dass $C$ eine Menge von Gödelnummern von $\mathcal{L}_A$-Sätzen ist, da wir andernfalls $C$ durch $C \cap \{\ulcorner\sigma\urcorner \mid \sigma \text{ ist } \mathcal{L}_A\text{-Satz}\}$ ersetzen können. Auf $C$ lässt sich der Unvollständigkeitssatz nicht direkt anwenden, da $C$ nicht notwendigerweise konsistent und vollständig sein muss. Deswegen definieren wir

$$\begin{aligned} C' = &\{\ulcorner\neg\sigma\urcorner \mid \ulcorner\neg\sigma\urcorner \in C \text{ und } \ulcorner\sigma\urcorner \notin C, \sigma \text{ hat gerade Anzahl an führenden } \neg\} \\ &\cup \{\ \ulcorner\sigma\urcorner\ \mid \ulcorner\neg\sigma\urcorner \notin C \text{ oder } \ulcorner\sigma\urcorner \in C, \sigma \text{ hat gerade Anzahl an führenden } \neg\}. \end{aligned}$$

Für $C'$ gilt

- $A \subseteq C'$ und $B \cap C' = \varnothing$.
- $C'$ ist *vollständig*, es gilt also für jeden $\mathcal{L}_A$-Satz $\tau$ entweder $\ulcorner\tau\urcorner \in C'$ oder $\ulcorner\neg\tau\urcorner \in C'$.
- $C'$ ist *konsistent*: Wegen der Definition von $C'$ ist für keinen $\mathcal{L}_A$-Satz $\ulcorner\tau\urcorner$ und $\ulcorner\neg\tau\urcorner$ in $C'$. Da $C'$ vollständig ist, bedeutet dies aber genau die Konsistenz von $C'$.

Nach dem Gödelschen Unvollständigkeitssatz ist $C'$ nicht rekursiv. Wäre nun $C$ rekursiv, so folgt, dass auch $C'$ rekursiv ist, es ist also auch $C$ nicht rekursiv.

**Satz 4.4.** *Sei $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}^-$ ein Nichtstandardmodell und erfülle $\mathcal{M}$ Overspill für $\Delta_0$-Formeln und den Anfangsabschnitt $\mathbb{N}$. Dann ist $\mathcal{M}$ nicht rekursiv.*

Jedes $\Delta_0$-rekursiv saturierte Modell $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}^-$ oder jedes Modell von $I\Delta_0$ erfüllt die Bedingungen von Satz 4.4.

*Beweis.* Seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$ disjunkt, rekursiv aufzählbar und rekursiv untrennbar. Da $A, B$ rekursiv aufzählbar sind existieren $\Delta_0$-Formeln $\alpha(x, \bar{y})$ und $\beta(x, \bar{z})$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n \in A \;&\Leftrightarrow\; \mathbb{N} \models \exists \bar{y}\ \alpha(n, \bar{y}) \\ n \in B \;&\Leftrightarrow\; \mathbb{N} \models \exists \bar{z}\ \beta(n, \bar{z}). \end{aligned}$$

Es gilt also für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{N} \models \forall x, \bar{y}, \bar{z} \leq k\ \neg(\alpha(x, \bar{y}) \wedge \beta(x, \bar{z})),$$

und da dies eine $\Delta_0$-Formel ist und $\mathcal{M}$ eine Enderweiterung von $\mathbb{N}$ ist, gilt auch (siehe [2, Theorem 2.7.])

$$\mathcal{M} \models \forall x, \bar{y}, \bar{z} \leq k\ \neg(\alpha(x, \bar{y}) \wedge \beta(x, \bar{z}))$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Wendet man Overspill für diese $\Delta_0$-Formel an, erhält man $a > \mathbb{N}$, sodass

$$\mathcal{M} \models \forall x, \bar{y}, \bar{z} \leq a\ \neg(\alpha(x, \bar{y}) \wedge \beta(x, \bar{z})).$$

Definiere nun die Menge

$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{M} \models \exists \bar{y} \leq a\ \alpha(n, \bar{y})\}.$$

Es gilt $A \subseteq C$ und $B \cap C = \varnothing$. Wäre nun $\mathcal{M} \cong (\mathbb{N}, \oplus, \odot, \olessthan, n_0, n_1)$ mit rekursivem $\oplus$ oder rekursivem $\odot$, so wollen wir zeigen, dass $C$ rekursiv ist, dies führt zu einem Widerspruch.
Falls $\mathcal{M} \models PA$, bekommen wir mit Satz 3.4 ein $b \in \mathcal{M}$, sodass $C = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{M} \models (b)_n \neq 0\}$ und mit einem analogen Beweis wie für Satz 4.2 erhalten wir, dass $C$ rekursiv ist. Da wir aber den Satz von Tennenbaum für ein allgemeineres Modell $\mathcal{M}$ beweisen wollen, werden wir diesen Schritt nun explizit ausführen.
Die Relation $\mathrm{pr}(u) = v$ ist rekursiv, es gibt also eine $\Sigma_1$-Formel $\exists \bar{w}\ \theta(u, v, \bar{w})$ mit $\theta$ in $\Delta_0$, die diese Relation in $\mathrm{PA}^-$ definiert. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models\ & \exists s \leq a\ \forall u \leq k\ \exists v \leq a\ \exists \bar{w} \leq a \\ & [\theta(u, v, \bar{w}) \wedge (\exists t \leq s(v \cdot t = s) \leftrightarrow \exists \bar{y} \leq a\ \alpha(u, \bar{y}))] \end{aligned}$$

Um einzusehen dass dies gilt, definiere $s = \mathrm{pr}(n_0) \cdots \mathrm{pr}(n_k)$, wobei $n_0, ..., n_k$ die ersten $k+1$ Elemente in $C$ sind. Auf diese Formel können wir $\Delta_0$-Overspill anwenden um $b > \mathbb{N}$ und $s \in \mathcal{M}$ zu erhalten, sodass

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models\ & \forall u \leq b\ \exists v \leq a\ \exists \bar{w} \leq a \\ & [\theta(u, v, \bar{w}) \wedge (\exists t \leq s(v \cdot t = s) \leftrightarrow \exists \bar{y} \leq a\ \alpha(u, \bar{y}))] \end{aligned}$$

Es gilt also $C = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{M} \models \mathrm{pr}(n) | s\}$. Sei nun $n_s$ das Bild von $s \in \mathcal{M}$ des Isomorphismus $\mathcal{M} \cong (\mathbb{N}, \oplus, \odot, \olessthan, n_0, n_1)$. Dann ist

$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists t(\overbrace{t \oplus t \oplus \cdots \oplus t}^{\mathrm{pr}(n)} = n_s)\}.$$

Wäre $\bigoplus$ rekursiv, so folgt, dass $C$ rekursiv aufzählbar ist. $D = \mathbb{N} \backslash C$ ist definiert durch $D = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{M} \models \neg \exists \bar{y} \leq a\ \alpha(n, \bar{y})\}$. Mit einem analogen Beweis folgt, dass auch $D$ rekursiv aufzählbar ist. Es muss also $C$ rekursiv sein, dies ist ein Widerspruch zur Annahme. $\square$

# Literatur


[1] Stefan Hetzl. Gödel's incompleteness theorems. TU Wien, Skriptum, https://dmg.tuwien.ac.at/hetzl/teaching/git_2020.pdf, 2020.

[2] R. Kaye, S. M. S. R. Kaye, and Oxford University Press. *Models of Peano Arithmetic*. Clarendon Press, 1991.