Der Gentzensche Hauptsatz

Ein Beweis aus der Gentzenschen Beweistheorie nach G. Takeuti

Markus Rinke

Seminararbeit für das Fach Logik für TM

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
Technische Universität Wien
Wien
11.04.2019

Inhaltsverzeichnis

Die vorliegende Arbeit erbringt einen Beweis für den Gentzenschen Hauptsatz (Gentzen, 1935). Dazu werden wir zunächst den Sequentialkalkül $\mathcal{LK}$[1] für die Prädikatenlogik erster Stufe formulieren. Takeuti's *Proof Theory* (1986) soll uns dabei sowohl für die Notation als auch für die Beweisidee, wesentlich als Vorlage dienen. Die Terminologie sowie die entsprechenden Grundlagen zum Umgang mit Sprachen erster Stufe werden fürderhin als bekannt vorausgesetzt.

1 Einführung

Im Folgenden bezeichnen wir mit griechischen Großbuchstaben $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$ endliche (auch leere) Folgen von Formeln, das heißt, wir schreiben Γ anstelle von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, wobei φ_i für $i \in \{1, \ldots, n\}$ eine Formel in Sprache erster Stufe ist. Überdies werden wir uns mit dem Begriff *Formel* stets auf prädikatenlogische Formeln beziehen, die wohlgeformt sind. Wir reservieren für solche die griechischen Kleinbuchstaben $\varphi, \psi, \ldots$, sowie zwei ausgezeichnete Buchstaben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{M}$. Um den Sequentialkalkül zu formulieren, führen wir zunächst ein Hilfssymbol $\rightarrow$ ein.

Definition 1. Für beliebiges Γ und Δ bezeichnen wir mit $\Gamma \rightarrow \Delta$ ein *Sequent*. Dabei heißt Γ *Antezedens* und Δ *Sukzedens* des Sequent. Γ, Δ nennen wir auch *Sequentformeln*.

Notation 1. Für $m, n \geq 1$ meinen wir mit einem Sequent der Form $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m \rightarrow \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ den Ausdruck $\Gamma_1 \wedge \ldots \wedge \Gamma_m \supset \Delta_1 \vee \ldots \vee \Delta_n$. Für $m \geq 1$ und leeres Sukzedens ist $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m \rightarrow \bot$. Für $n \geq 1$ bedeutet der Ausdruck $\rightarrow \Delta_1, \ldots \Delta_n$, dass $\Delta_1 \vee \ldots \vee \Delta_n$ gültig ist.

Definition 2. Eine *Inferenz*[2] ist ein Ausdruck der Form

$$\frac{S_1}{S} \quad \text{oder} \quad \frac{S_1 \qquad S_2}{S}\ ,$$

wobei S_1, S_2 und S Sequente sind. Dabei heißen S_1 und S_2 *Obersequente* resp. S *Untersequent* einer Inferenz. Eine Inferenz entsteht dabei durch Anwendung der folgenden Regeln:

1. Strukturelle Regeln:

   1.1 Abschwächung:

$$W_l:\ \frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \rightarrow \Delta}\ ; \qquad W_r:\ \frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \varphi}\ .$$

   1.2 Kontraktion:

$$K_l:\ \frac{\varphi, \varphi, \Gamma \rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \rightarrow \Delta}\ ; \qquad K_r:\ \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \rightarrow \Delta, \varphi}\ .$$

   1.3 Vertauschung:

$$P_l:\ \frac{\Lambda, \varphi, \psi, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Lambda, \psi, \varphi, \Gamma \rightarrow \Delta}\ ; \qquad P_r:\ \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Lambda,}{\Gamma \rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Lambda}\ .$$

   1.4 Schnitt:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \rightarrow \Theta}{\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Theta}\ .$$

[1]auch: logisch klassischer Kalkül

[2]auch Schlußfigur (ibid. 181.)

Wir nennen φ auch die *Schnittformel* dieser Inferenz.

2. Logische Regeln:

2.1 Negation:

$$\neg_l : \frac{\Gamma \to \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \to \Delta} ; \qquad \neg_r : \frac{\varphi, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg\varphi} .$$

2.2 Konjunktion:

$$\wedge_l : \frac{\varphi, \Gamma \to \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \to \Delta} \quad \text{und} \quad \frac{\psi, \Gamma \to \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \to \Delta} ;$$

$$\wedge_r : \frac{\Gamma \to \Delta, \varphi \qquad \Gamma \to \Delta, \psi}{\Gamma \to \Delta, \varphi \wedge \psi} .$$

2.3 Disjunktion:

$$\vee_l : \frac{\varphi, \Gamma \to \Delta \qquad \psi, \Gamma \to \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \to \Delta} ;$$

$$\vee_r : \frac{\Gamma \to \Delta, \varphi}{\Gamma \to \Delta, \varphi \vee \psi} \quad \text{und} \quad \frac{\Gamma \to \Delta, \psi}{\Gamma \to \Delta, \varphi \vee \psi} .$$

2.4 Implikation:

$$\supset_l : \frac{\Gamma \to \Delta, \varphi \qquad \psi, \Pi \to \Lambda}{\varphi \supset \psi, \Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda} ;$$

$$\supset_r : \frac{\varphi, \Gamma \to \Delta, \psi}{\Gamma \to \Delta, \varphi \supset \psi} .$$

Die Regeln 2.1 – 2.4 werden als *aussagenlogische Regeln* bezeichnet. Die Formeln φ, ψ in 2.1 – 2.4 heißen auch *Hilfsformeln* und $\neg\varphi$ resp. $\varphi \wedge \psi$ resp. $\varphi \vee \psi$ resp. $\varphi \supset \psi$ auch *Hauptformeln der logischen Regeln.*

2.5 Allquantifizierung:

$$\forall_l : \frac{\varphi(t), \Gamma \to \Delta}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \to \Delta} , \qquad \forall_r : \frac{\Gamma \to \Delta, \varphi(c)}{\Gamma \to \Delta, \forall x\, \varphi(x)} ,$$

wobei t ein beliebiger Term ist und c eine freie Variable, die nicht in im Untersequent vorkommt.

2.6 Existenzquantifizierung:

$$\exists_l : \frac{\varphi(c), \Gamma \to \Delta}{\exists x\, \varphi(x), \Gamma \to \Delta} , \qquad \exists_r : \frac{\Gamma \to \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \to \Delta, \forall x\, \varphi(x)} ,$$

wobei t ein beliebiger Term ist und c eine freie Variable, die nicht im Untersequent vorkommt.

Die Formeln $\varphi(t), \varphi(c)$ in 2.5 und 2.6 heißen auch *Hilfsformeln* und $\forall x\, \varphi(x)$ resp. $\exists x\, \varphi(x)$ heißen auch *Hauptformeln* der Regel. Die Variable c in $\forall_r$ resp. $\exists_l$ bezeichnen wir als *Eigenvariable* der Regel. Die Regeln 2.5 und 2.6 werden als *Quantorenregeln*[3] bezeichnet.

[3] Vgl. dazu auch die schwache und starke Einführung eines Quantors in der Prädikatenlogik sowie Substitution in [2]*Logik und Grundlagen.* Vorlesungsskriptum, (2018) 53-54 und 67-69.

Für eine beliebige Formel $\mathfrak{A}$ heißt eine Sequent der Form $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ *Axiom.*

Als nächstes möchten wir festlegen, wann ein Sequent (in $\mathcal{LK}$) beweisbar ist. Dazu führen wir den Begriff des formalen Beweises ein.

Definition 3. Ein *Beweis* P in $\mathcal{LK}$, oder *$\mathcal{LK}$-Beweis*, ist ein Baum[4] aus Sequenten, der folgende Bedingungen erfüllt:

- Die obersten Sequente von P sind Axiome.
- Jedes Sequent in P, ausgenommen des Untersten, ist ein Obersequent von einer Inferenz, deren Untersequent ebenfalls in P ist.

Das letzte Sequent S_P von P bezeichnen wir als *Endsequent von P.*

Definition 4. Ein Sequent S ist *beweisbar* (in $\mathcal{LK}$) oder auch *$\mathcal{LK}$-beweisbar*, wenn es einen $\mathcal{LK}$-Beweis von S gibt. Ein Beweis ohne Schnittregel heißt *schnittfrei.*

Notation 2. Manchmal werden Teile eines $\mathcal{LK}$-Beweises abgekürzt. Wir werden dieses Vorgehen durch das Hilfssymbol $\vdots$ ausdrücken. Beispielsweise bezeichnen wir mit

$$\frac{\vdots}{S} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} S_1 \qquad S_2 \\ \dfrac{\vdots}{S} \end{array}$$

einen $\mathcal{LK}$-Beweis von S resp. einen $\mathcal{LK}$-Beweis von S aus S_1 und S_2.

Definition 5. Eine Folge aus Sequenten eines Beweis P heißt *Faden*[5] $\mathcal{F}$ (von P), falls die folgenden Bedingungen gelten:

1 Die Folge beginnt mit einem Axiom $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ und endet mit einem Endsequent S_P.

2 Jedes Sequent mit Ausnahme des Letzten ist ein Obersequent einer Inferenz, an die sich unmittelbar ein Untersequent dieser Inferenz anschließt.

Notation 3. Für den Rest der Arbeit möchten wir noch festhalten, dass der Schluss der zu zeigenden Behauptung, i.e. das Beweisende im natürlichen Sinne, mit $\dashv$ gekennzeichnet wird.

2 Der Gentzensche Hauptsatz: Vorbereitung

Wir möchten uns nun auf Basis der vorangegangen Betrachtungen dem Gentzenschen Hauptsatz zuwenden. Dieser besagt, dass jedes Theorem der Prädikatenlogik ohne der Schnittregel bewiesen werden kann.

Theorem 1 (Der Gentzensche Hauptsatz, 1935)**.** *Es sei S ein Sequent und P ein $\mathcal{LK}$-Beweis von S. Dann existiert ein Beweis P' von S, der schnittfrei ist.*

Um das Theorem zu beweisen gehen wir wie G. Gentzen (1935) beziehungsweise G. Takeuti (1986) vor. Zunächst werden wir eine neue Inferenzregel einführen und zeigen, dass diese (in $\mathcal{LK}$) äquivalent zur Schnittregel ist. Dann werden wir nachweisen, dass der Hauptsatz für $\mathcal{LK}^*$, i.e. $\mathcal{LK}$ mit der neuen Inferenzregel anstelle der Schnittregel, gültig ist.

[4] Takeuti verwendet den Begriff 'tree', um auf baumähnliche Struktur eines Beweises hinzudeuten.
[5] engl. thread

Definition 6. Es sei $\mathfrak{M}$ eine Formel. Wir nennen eine Inferenz der Form

$$\frac{\Gamma \to \Delta \qquad \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}\,(\mathfrak{M})$$

eine *Mischung* bezüglich $\mathfrak{M}$, wobei $\mathfrak{M}$ sowohl in Δ als auch Π vorkommt. Die Ausdrücke Δ^* und Π^* entstehen dabei durch Entfernung aller Vorkommnisse von $\mathfrak{M}$ in Δ resp. $\mathfrak{M}$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ die *Mischformel* der Inferenz.

Ersetzt man in $\mathcal{LK}$ die Schnittregel mit der Mischregel so bringt man dies durch $\mathcal{LK}^*$ zum Ausdruck.

Wir behaupten, dass $\mathcal{LK}$ und $\mathcal{LK}^*$ äquivalent sind:

Theorem 2. *Eine Sequent S ist $\mathcal{LK}$-beweisbar, genau dann wenn S $\mathcal{LK}^*$-beweisbar ist.*

Beweis. Sei S eine Sequent und P ein $\mathcal{LK}^*$-Beweis davon. Wir zeigen, dass sich die Schnittregel aus der Mischregel ableiten lässt (in $\mathcal{LK}^*$). Betrachte dazu einen Schnitt der Form

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{M} \qquad \mathfrak{M}, \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}\,,$$

mit einer Formel $\mathfrak{M}$. Es bezeichne n die Anzahl der Vorkommnisse von $\mathfrak{M}$ im Sukzedens des linken Obersequent und m die Anzahl der Vorkommnisse von $\mathfrak{M}$ im Antezendens des rechten Obersequent. Wir wenden die Mischregel an und erhalten

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{M} \qquad \mathfrak{M}, \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}\,(\mathfrak{M})\ .$$

Im Fall $n = m = 0$ sind wir fertig. Seien also $n, m \geq 1$. Dann wenden wir Abschwächungn auf das linke Untersequent an und Vertauschen so lange, bis wir Π erhalten. Analog wenden Abschwächungen auf die rechte Seite an und vertauschen so lange, bis wir Δ erhalten. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{array}{cl}
\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda & \\
\vdots & \\
\hline
\Gamma, \Pi \to \Delta^*, \Lambda & W_l,\ P_l \\
\vdots & \\
\hline
\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda & W_r,\ P_r
\end{array}$$

Für die andere Richtung zeigen wir, dass sich die Mischregel aus der Schnittregel ableiten lässt. Mit n und m, $n, m \geq 1$ bezeichnen wir wieder die Anzahl der Vorkommnisse im Sukzedens des linken Obersequent resp. im Antezedens des rechten Obersequent. Für den Fall, dass $n = m = 1$ führt eine Anwendung der Schnittregel bereits zum Ziel. Für $n \neq 1$ oder $m \neq 1$ wenden wir zunächst Vertauschungen auf die Obersequente an, sodass alle Vorkommnisse $\mathfrak{M}$ am Ende beziehungsweise Anfang des Sukzedens resp. Antezedens liegen. Dann Kontraktionen auf die linke beziehungsweise rechte Seite an und führen einen Schnitt durch. Es ergibt sich

$$
\begin{array}{cccc}
 & \Gamma \to \Delta & \Pi \to \Lambda & \\
 & \vdots & \vdots & \\
P_r & \overline{\Gamma \to \Delta^*, \mathfrak{M}^n} & \overline{\mathfrak{M}^m, \Pi^* \to \Lambda} & P_l \\
 & \vdots & \vdots & \\
K_l & \overline{\Gamma \to \Delta^*, \mathfrak{M}} & \overline{\mathfrak{M}, \Pi^* \to \Lambda} & K_r \\
 & \multicolumn{2}{c}{\overline{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}} & \text{Schnitt}
\end{array}
$$

⊣

Bemerkung 1. Wir haben im Beweis alle strukturellen Regeln verwendet.

Bevor wir einen Beweis für den Hauptsatz anführen, möchten wir noch zwei grundlegende Termini einführen, die uns ein Maß für die Komplexität eines Beweises bieten sollen. Zudem werden wir ein Hilfsresultat vorstellen, was uns an einer wesentlichen Stelle im Beweis des Hauptsatzes von Behelf sein wird:

Definition 7. Sei φ eine Formel. Wir bezeichnen mit dem *Grad* der Formel, notiert als $grad(\varphi)$, die Anzahl der logischen Symbole in φ. Der *Grad einer Mischung* ist der Grad der zugehörigen Mischformel $\mathfrak{M}$. Hat ein $\mathcal{LK}$-Beweis P eine Mischung (nur) als letzte Inferenz, dann ist der *Grad von P*, $grad(P)$, definiert als Grad eben dieser Mischung.

Definition 8. Wir bezeichnen mit der *linken* beziehungsweise *rechten Rangzahl* (eines Beweises P), $rang_l(P)$ resp. $rang_r(P)$, die größte Anzahl von in einem Faden aneinander anschließenden Sequente, deren unterstes Sequent das linke (rechte) Obersequent der Mischung ist und von denen jede im Sukzedens (Antezedens) die Mischformel $\mathfrak{M}$ enthält. Der *Rang eines Beweis P* ist definiert als Summe der linken und rechten Rangzahl,

$$rang(P) := rang_l(P) + rang_r(P).$$

Bemerkung 2. Der Rang eines Beweises P ist offenbar mindestens 2.

Notation 4. Mit $\Gamma(c) \to \Delta(c)$ meinen wir ein Sequent der Form $\varphi_1(c), \ldots, \varphi_m(c) \to \psi_1(c), \ldots, \psi_n(c)$. Analoges gilt für $\Gamma(t) \to \Delta(t)$.

Lemma 1. *Es sei t ein beliebiger Term, und $\Gamma(c) \to \Delta(c)$ ein $\mathcal{LK}$-beweisbares Sequent. Es sei $P(c)$ ein Beweis dieses Sequents und es werde $P'(c)$ aus $P(c)$ durch Substitution der Eigenvariablen so gewonnen, dass jede Eigenvariable von $P'(c)$ verschieden von c ist und nicht in t enthalten ist. Dann ist $P'(t)$ ein Beweis von $\Gamma(t) \to \Delta(t)$.*

Beweis. Für einen Beweis verweisen wir auf G. Takeuti [1]. ⊣

3 Der Gentzensche Hauptsatz: Beweis

Der Beweis vom Gentzeschen Hauptsatz ergibt sich nun durch das folgende Theorem.

Theorem 3. *Es sei S ein Sequent und P ein $\mathcal{LK}^*$-Beweis von S. Dann existiert ein Beweis P' von S ohne Mischung.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch das nachstehende Lemma vermittels Induktion nach Anzahl der Mischungen im Beweis S_P. ⊣

Lemma 2. *Es sei P ein $\mathcal{LK}^*$-Beweis eines Sequent S, das genau eine Mischung als letzte Inferenz enthält. Dann existiert ein Beweis P' in $\mathcal{LK}^*$ ohne Mischung.*

Beweis. Wir werden den Beweis über zwei vollständige Induktionen nach dem Grad γ und dem Rang ρ des Beweises P führen. Dazu unterscheiden wir die Fälle $\rho = 2$ und $\rho > 2$.

1. Fall: $\rho = 2$

1.1 Es sei $rang_l(P) = 1$ und das linke Obersequent ist ein Axiom. Die Mischung lautet also:

$$\mathrm{M}\ \dfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \qquad \Pi \to \Lambda}{\mathfrak{A}, \Pi^* \to \Lambda}\ (\mathfrak{A})$$

Durch Vertauschungen und Kontraktionen erhält man das Beweisende ohne Mischung:

$$\begin{array}{cc} \Pi \to \Lambda & \\ \vdots & \\ \hline \mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{A}, \Pi^* \to \Lambda & P_l \\ \vdots & \\ \hline \mathfrak{A}, \Pi^* \to \Lambda & K_l \end{array}$$

1.2 Es sei $rang_r(P) = 1$ und das rechte Obersequent ist ein Axiom. Die Herleitung verläuft aus Symmetriegründen analog zum vorherigen Fall.

1.3 Weder das linke noch das rechte Obersequent ist ein Axiom aber das linke Obersequent ist ein Untersequent einer strukturellen Regel S_l, i.e., durch W_l, K_l oder P_l. Wegen $rang_l(P) = 1$ kann $\mathfrak{M}$ nicht im Sukzedens des Obersequent von S_l vorkommen. Daraus folgt unmittelbar, dass S_l nur eine Abschwächung W_l sein kann. Die Mischung lautet also:

$$\begin{array}{l} S_l \\ M \end{array}\ \dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{M}} \qquad \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta, \Lambda}\ (\mathfrak{M})$$

wobei $\mathfrak{M}$ nicht in Δ vorkommt. Durch Abschwächungen und Vertauschungen erhält man das Beweisende ohne Mischung:

$$\begin{array}{cc} \Gamma \to \Delta & \\ \vdots & \\ \hline \Pi^*, \Gamma \to \Delta, \Lambda & W_l, W_r \\ \vdots & \\ \hline \Gamma, \Pi^* \to \Delta, \Lambda & P_l \end{array}$$

1.4 Weder das linke noch das rechte Obersequent ist ein Axiom aber das rechte Obersequent ist ein Untersequent einer strukturellen Regel S_r, i.e., durch W_r, K_r oder P_r. Die Herleitung verläuft aus Symmetriegründen analog zum vorherigen Fall.

Linkes und rechtes Obersequent sind weder Axiome noch Untersequente einer strukturellen Regel. Dann kommt $\mathfrak{M}$ als Hauptformel einer logischen Regel im Sukzedens des linken Obersequent und als Antezedens des rechten Obersequent vor.

IH: Die Aussage ist für einen Beweis mit Grad $< \gamma$ bereits gültig.

1.5 Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ ist eine Konjunktion. Dann sieht das Beweisende folgendermaßen aus:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta, \varphi \qquad \Gamma \to \Delta, \psi}{\Gamma \to \Delta, \varphi \wedge \psi} \qquad \dfrac{\varphi, \Pi \to \Lambda}{\varphi \wedge \psi, \Pi \to \Lambda}}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}\,(\varphi \wedge \psi)$$

Wir wenden eine Mischung auf die äußeren Obersequente an und führen hernach Abschwächungen und Vertauschungen durch. Dies sieht so aus:

$$M \quad \dfrac{\Gamma \to \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi, \to \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^* \Lambda}\,(\varphi)$$

$$\dfrac{\vdots}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda} \quad W_l, W_r, P_l, P_r$$

Wir wenden **IH** auf M an. Daraus folgt wegen $grad(\varphi) < grad(\varphi \wedge \psi)$, dass sich der Beweis auf einen Beweis ohne Mischungen umwandeln lässt.

1.6 Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ ist eine Disjunktion. Dieser Fall ergibt sich so wie jener Fall, den wir gerade gezeigt haben.

1.7 Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ ist eine Negation. Dann sieht das Beweisende folgendermaßen aus:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg\varphi} \qquad \dfrac{\Pi \to \Lambda, \varphi}{\neg\varphi, \Pi \to \Lambda}}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}\,(\neg\varphi)$$

Wir wenden eine Mischung auf die Obersequente an und führen hernach Abschwächungen und Vertauschungen durch. Dies sieht so aus:

$$M \quad \dfrac{\Pi \to \Lambda, \varphi \qquad \varphi, \Gamma \to \Delta}{\Pi, \Gamma^* \to \Lambda^*, \Delta}\,(\varphi)$$

$$\dfrac{\vdots}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda} \quad W_l, W_r, P_l, P_r$$

Wie zuvor gelangen wir vermittels **IH** zu einem Beweis ohne Mischung.

1.8 Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ ist eine Implikation. Dann sieht das Beweisende folgendermaßen aus:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi, \Gamma_1 \to \Delta_1, \psi}{\Gamma_1 \to \Delta_1, \varphi \supset \psi} \qquad \dfrac{\Gamma_2 \to \Delta_2, \varphi \qquad \psi, \Gamma_3 \to \Delta_3}{\varphi \supset \psi, \Gamma_2, \Gamma_3 \to \Delta_2, \Delta_3}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \to \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}\,(\varphi \supset \psi)$$

Wir wenden eine Mischung auf die äußeren Obersequente an. Dann wenden wir eine Mischung auf $\Gamma_2 \to \Delta_2, \varphi$ und das Ergebnis der ersten Mischung an und führen hernach Abschwächungen und Vertauschungen durch. Dies sieht so aus:

$$M_2 \quad \dfrac{\Gamma_2 \to \Delta_2, \varphi \qquad M_1 \ \dfrac{\varphi, \Gamma_1 \to \Delta_1, \psi \qquad \psi, \Gamma_3 \to \Delta_3}{\varphi, \Gamma_1, \Gamma_3^* \to \Delta_1^*, \Delta_3}\,(\psi)}{\Gamma_2, \Gamma_1^*, \Gamma_3^{**} \to \Delta_2^*, \Delta_1^*, \Delta_3}\,(\varphi)$$

$$\dfrac{\vdots}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \to \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3} \quad W_l, W_r, P_l, P_r$$

wobei Γ_3^{**} bedeutet, dass sowohl jedes Vorkommnis von ψ, als auch von φ entfernt wurde. Nun wenden wir **IH** zunächst auf M_1, dann auf M_2 an. Die Grade der Mischformeln sind jeweils kleiner γ. Damit folgt, dass sich der Beweis auf einen Beweis ohne Mischungen umwandeln lässt.

1.9 Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ ist ein Allquantor. Seien t, c wie in Definition 2. Dann sieht das Beweisende folgendermaßen aus:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta, \varphi(c)}{\Gamma \to \Delta, \forall x\ \varphi(x)} \qquad \dfrac{\varphi(t), \Pi \to \Lambda}{\forall x\ \varphi(x), \Pi \to \Lambda}}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}\ (\forall x\ \varphi(x))$$

Die Gültigkeit dieser und nachstehender Substitution lässt sich durch Lemma 1 einsehen. Wir ersetzen Variable c überall durch den Term t und wenden eine Mischung auf die Obersequente an. Sodann verfahren wir wie zuvor und führen Abschwächungen und Vertauschungen durch.

$$M \quad \dfrac{\Gamma \to \Delta, \varphi(t) \qquad \varphi(t), \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}\ (\varphi(t))$$

$$\dfrac{\vdots}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda} \quad W_l, W_r, P_l, P_r$$

Wegen $rang(\varphi(t)) < rang(\forall x \varphi(x))$ kommen wir vermittels **IH** wieder zu einem Beweis ohne Mischung.

1.10 Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ ist ein Existenzquantor. Dieser Fall ergibt sich so wie jener Fall, den wir gerade gezeigt haben.

2. Fall: $\rho > 2$

In diesem Fall nehmen wir eine Unterscheidung zweier Fälle vor, nämlich dass $rang_r(P) > 1$, oder dass $rang_r(P) = 1$ und daher $rang_l(P) > 1$. Wir werden zunächst den Fall $rang_r(P) > 1$ behandeln und im Anschluss den zweiten Fall auf den Ersten zurückführen. Die Induktionshypothese ist ähnlich wie im vorherigen Abschnitt:

IH: In jedem Beweis Q der als letzte Inferenz eine Mischung enthält und darüber hinaus $grad(Q) < grad(P)$, oder $grad(Q) = grad(P)$ und $rang(Q) < rang(P)$, erfüllt, ist die Aussage bereits gültig.

2.1 $rang_r(P) > 1$

2.1.1 Das linke Obersequent der Mischung enthält im Antezedens die Mischformel $\mathfrak{M}$. Dann sieht das Beweisende folgendermaßen aus:

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}\ (\mathfrak{M}),$$

wobei also Γ die Mischformel $\mathfrak{M}$ enthält. Wir wenden auf die Obersequente Vertauschungen und Kontraktionen an und erhalten mit Abschwächungen und weiteren Vertauschungen das Beweisende ohne Mischung:

$$\vdots$$

$$\Pi \to \Lambda$$

$$P_l, K_l \quad \dfrac{\vdots}{\mathfrak{M}, \Pi^* \to \Lambda}$$

$$W_l, P_l \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda} \quad W_r, P_r$$

2.1.2 Das linke Obersequent der Mischung enthält im Antezedens nicht die Mischformel. Das rechte Obersequent ist das Untersequent einer strukturelle Regel S_r, d.h. Abschwächung, Kontraktion oder Vertauschung. Dann sieht das Beweisende folgendermaßen aus:

$$M \quad \frac{\Gamma \to \Delta \qquad S_r\,\dfrac{\Theta \to \Sigma}{\Pi \to \Lambda}}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}\,(\mathfrak{M}),$$

wobei weder in $\Gamma \to \Delta$, noch in $\Theta \to \Sigma$ eine Mischung vorkommt und Θ mindestens ein Vorkommen von $\mathfrak{M}$ enthält. Wir führen eine Mischung M' der jeweils oberen Sequente in M durch und nehmen Vertauschungen, S_r und Abschwächungen vor:

$$M' \quad \frac{\Gamma \to \Delta \qquad \Theta \to \Sigma}{\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Sigma}\,(\mathfrak{M})$$

$$\begin{array}{rc} & \vdots \\ \cline{2-2} P_l, W_l & \Theta^*, \Gamma \to \Delta^*, \Sigma \\ \cline{2-2} S_r & \Pi^*, \Gamma \to \Delta^*, \Lambda \\ \cline{2-2} P_l & \Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda \end{array}$$

Offensichtlich ist $grad(M') = \gamma$ und die linke Rangzahl im Beweis mit M' unverändert, Jedoch wurde die rechte Rangzahl um 1 verringert. Wegen **IH** folgt, dass $\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Sigma$ ohne Mischung beweisbar ist.

2.1.3 Das linke Obersequent der Mischung enthält im Antezedens nicht die Mischformel. Das rechte Obersequent L_r ist das Untersequent einer logischen Regel. Wir betrachten dabei die Anzahl der Obersequente und bemerken, dass L_r im Fall von $\neg$, $\wedge_l$, , $\vee_r$, $\supset_r$, $\forall_l, \forall_r$, $\exists_l, \exists_r$ genau ein Obersequent hat, und sonst, d.h. $\wedge_r$, $\vee_l$ und $\supset_l$, zwei.

2.1.3.1 *Die Anzahl der Obersequente ist* 1.
Dann sieht das Beweisende folgendermaßen aus:

$$M \quad \frac{\Gamma \to \Delta \qquad L_r\,\dfrac{\mathfrak{M}_h, \Theta \to \Lambda}{\mathfrak{M}, \Theta \to \Lambda}}{\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda}\,(\mathfrak{M}),$$

wobei $\mathfrak{M}_h$ die (evtl. leere) Hilfsformel von L_r und $\mathfrak{M}$ die (evtl. leere) Hauptformel von L_r bezeichnet. Wir geben nun ein allgemeines Schema für diesen Fall an, um die Mischung zu eliminieren und werden dabei nur auf den Fall für Quantoren die Details einfügen. Das Vorgehen ist ähnlich zu 2.1.2:

$$M' \quad \frac{\Gamma \to \Delta \qquad \mathfrak{M}_h, \Theta \to \Lambda}{\Gamma, \mathfrak{M}_h^*, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda}\,(\mathfrak{M})$$

$$\begin{array}{rc} & \vdots \\ \cline{2-2} P_l, W_l & \mathfrak{M}_h, \Theta^*, \Gamma \to \Delta^*, \Lambda \\ \cline{2-2} L_r' & \mathfrak{M}', \Theta^*, \Gamma \to \Delta^*, \Lambda \end{array}$$

Man beachte, dass dabei im Untersequent von M' das M_h als $\mathfrak{M}_h^*$ nur aus formalen Gründen geschrieben wird. Im konkreten Fall wird hier klar sein, dass $\mathfrak{M}$ nicht in $\mathfrak{M}_h$ vorkommt. Weiters entsteht das unterste Sequent durch eine Regel von der Form L_r, was wir durch L_r' zum Ausdruck bringen. Wir wenden **IH** wieder auf M' und argumentieren wie zuvor, sodass sich ein Beweis ohne

Mischung ergibt. Nun beobachten wir, dass das Sequent $\mathfrak{M}', \Theta^*, \Gamma \to \Delta^*, \Lambda$ noch nicht von der gewünschten Form $\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda$ ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:

2.1.3.1.1 $\mathfrak{M}$ ist nicht in $\mathfrak{M}'$.

Dann sind lediglich Vertauschungen nötig um das gewünschte Endsequent zu erhalten.

2.1.3.1.2 $\mathfrak{M}$ ist in $\mathfrak{M}'$.

Dann ist $\mathfrak{M}'$ die Hauptformel von L_r und gleich $\mathfrak{M}$. Wir fahren wie folgt fort:

$$M'' \quad \dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \mathfrak{M}, \Theta^*, \Gamma \to \Delta^*, \Lambda}{\Gamma, \Theta^*, \Gamma^* \to \Delta^*, \Delta^*, \Lambda}\ (\mathfrak{M})$$

$$\dfrac{\vdots}{\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda}\ K_l, K_r, P_l, P_r$$

Nun ist $rang_l(M'')$ unverändert und die rechte Rangzahl ist 1, zumal im rechten Antezedens $\mathfrak{M}_h, \Theta^*, \Gamma \to \Delta^*, \Lambda$ die Mischformel $\mathfrak{M}$ nicht vorkommt. Somit lässt sich **IH** anwenden und die Mischung kann wegschafft werden.

Wir werden jetzt noch den Fall für den Existenzquantor ausführen. Dazu setzen wir in das Schema ein:

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad L_r\ \dfrac{\varphi(c), \Theta \to \Lambda}{\exists x\, \varphi(x), \Theta \to \Lambda}}{\Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda}\ (\exists x\, \varphi(x))$$

Nun setzen wir in M' ein:

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \varphi(c'), \Theta \to \Lambda}{\Gamma, \varphi(c'), \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda}\ (\exists x\, \varphi(x)),$$

wobei c' eine freie Variable ist, die nicht in P vorkommt. Die Substitution ist wie schon in 1.9 durch Lemma 1 gewährleistet. Mit der selben Argumentation lässt sich diese Mischung wieder durch Anwendung von **IH** eliminieren. Wir haben:

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi(c'), \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda}\quad \vdots}{\varphi(c'), \Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda}\ P_l}{\exists x\, \varphi(x), \Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda}\ L_r}{\Gamma, \Gamma^*, \Theta^* \to \Delta^*, \Delta^*, \Lambda}\ (\exists x\, \varphi(x))$$

Die letzte Mischung lässt sich nun wieder durch **IH** beseitigen, wenn man berücksichtigt, dass die linke Rangzahl unverändert ist, und die rechte Rangzahl 1 ist, da in der Formel $\varphi(c'), \Gamma, \Theta^* \to \Delta^*, \Lambda$ die Mischformel $\exists x\, \varphi(x)$ im Antezedens nicht mehr vorkommt.

2.1.3.2 *Die Anzahl der Obersequente ist* 2.

Wir werden hier nur den Fall für die Implikation im Detail behandeln. Die anderen Symbole lassen sich analog unter Beachtung von Definition 2 unter entsprechender Fallunterscheidung beweisen. Das Beweisende für $\supset$ als Haupt- und Mischformel sieht dann folgendermaßen aus:

$$
M \qquad \dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \dfrac{\Theta_1 \to \Lambda_1, \varphi \qquad \psi, \Theta_2 \to \Lambda_2}{\varphi \supset \psi, \Theta_1, \Theta_2 \to \Lambda_1, \Lambda_2}}{\Gamma, \Theta_1^*, \Theta_2^* \to \Delta^*, \Lambda_1, \Lambda_2}\,(\varphi \supset \psi)
$$

Wir betrachten die zwei Beweise P_1 und P_2:

$$
\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma \to \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \Theta_1 \to \Lambda_1, \varphi\end{matrix}}{\Gamma, \Theta_1^* \to \Delta^*, \Lambda_1, \varphi}\,(\varphi \supset \psi) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma \to \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \psi, \Theta_2 \to \Lambda_2\end{matrix}}{\Gamma, \psi, \Theta_2^* \to \Delta^*, \Lambda_2}\,(\varphi \supset \psi)
$$

wobei $\varphi \supset \psi$ oBdA. in Θ_1 und Θ_2 sind, da man sonst für P_1

$$
\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \dfrac{\Theta_1 \to \Lambda_1, \varphi}{\vdots}\end{matrix}}{\Gamma, \Theta_1^* \to \Delta^*, \Lambda_1, \varphi}\,W_l, W_r, P_l, P_r
$$

schreibt und analog für P_2 vorgeht. Wir beobachten weiters, dass $grad(P_1) = grad(P_2) = grad(P)$, $rang_l(P_1) = rang_l(P_2) = rang_l(P)$ und $rang_r(P_1) = rang_r(P_2) = rang(P) - 1$. Wie zuvor wenden wir **IH** an und erhalten, dass die untersten Sequente von P_1, P_2 ohne Mischung bewiesen werden können. Wir betrachten nun noch einen Beweis P':

$$
M \qquad \dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma, \Theta_1^* \to \Delta^*, \Lambda_1, \varphi\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \dfrac{\Gamma, \psi, \Theta_2^* \to \Delta^*, \Lambda_2}{\vdots}\end{matrix}}{\psi, \Gamma, \Theta_2^* \to \Delta^*, \Lambda_2}\,P_l}{\varphi \supset \psi, \Gamma, \Theta_1^*, \Gamma, \Theta_2^* \to \Delta^*, \Lambda_1, \Delta^*, \Lambda_2}}{\Gamma, \Gamma, \Theta_1^*, \Gamma, \Theta_2^* \to \Delta^*, \Delta^*, \Lambda_1, \Delta^*, \Lambda_2}\,(\varphi \supset \psi).
$$

Sodann argumentieren wir für den Grad und die linke Rangzahl von P' und P wie zuvor, und bemerken, dass wieder $rang_r(P') = 1$ und können **IH** aufgrund $rang(P') < \gamma$ anwenden und erhalten so die Behauptung.

2.2 $rang_r(P) = 1$ und $rang_l(P) > 1$
Dieser Fall lässt sich ganz analog zum Vorherigen behandeln, wenn man die Symmetrieeigenschaft der strukturellen und aussagenlogischen Regeln ausnützt.

$\dashv$

Beweis von Theorem 1. Der Beweis ergibt sich unmittelbar durch vollständige Induktion nach Mischungen aus Theorem 3. und der in Theorem 2. bewiesenen Tatsache, dass $\mathcal{LK}$ und $\mathcal{LK}^*$ äquivalent sind. $\dashv$

Die Aussage des Satzes ist bemerkenswert, da sie zu gegebenem Beweis eine gewisse Normalform garantiert. Das heißt, jeder Beweis lässt sich ohne Umwege schreiben. Sonach werden keine Begriffe eingeführt, die nicht auch tatsächlich im Beweisende enthalten sind.

Literatur

[1] Gaisi Takeuti. *Proof Theory.* Dover Publications, Second edition, 1987.

[2] Martin Goldstern, Moritz Gschwandtner und Stefan Hetzl. *Logik und Grundlagen.* Vorlesungsskriptum, 2018.

[3] Gerhard Gentzen. 'Untersuchungen über das logische Schließen. I'. *Mathematische Zeitschrift.* 176 – 210. 1935.