Prof. Dr. M. Lesch
P. Holy

Abgabe bis 03.02.

Übungen zur Vorlesung Elemente der Mathematik
BONUSPUNKTEBLATT

Aufgabe 1: (2 Punkte) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Für jede Teilmenge U von X definieren wir $f[U]$, das Bild der Teilmenge U unter f, als $f[U] = \{f(u) \mid u \in U\}$. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist wenn für alle $A, B \subseteq X$ gilt:

$$f[A \cap B] = f[A] \cap f[B].$$

Aufgabe 2: (2 Punkte) Für zwei natürliche Zahlen a und b bezeichne $\max(a, b)$ die größere der beiden. So gilt z.B. $\max(7, 5) = 7$ und $\max(6, 6) = 6$. Betrachten und kommentieren Sie den folgenden Induktionsbeweis.

Behauptung: Für alle a, b, n in $\mathbb{N}$ gilt $\max(a, b) = n \;\to\; a = b$.

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $P(n)$ die Aussage "$\forall a, b \in \mathbb{N}\colon\ \max(a, b) = n \;\to\; a = b$". Sind $a, b \in \mathbb{N}$ und ist $\max(a, b) = 0$, so sind a und b beide gleich 0. Somit gilt also $P(0)$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $P(n)$ gelte. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und sei $\max(a, b) = \sigma(n)$. Dann gilt $\max(a - 1, b - 1) = n$. Da $P(n)$ gilt, folgt hieraus $a - 1 = b - 1$. Damit gilt aber auch $a = b$. Somit gilt also $P(\sigma(n))$.

Nach dem Axiom der vollständigen Induktion gilt die Eigenschaft P also für alle natürlichen Zahlen.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Zahlen der Form $111\ldots1$ (im Dezimalsystem) nennen wir *Einserkolonnen*. Wir bezeichnen sie mit $R(0) = 0$, $R(1) = 1$, $R(2) = 11$, $R(3) = 111$, ...

(a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$ggT(R(k), R(k + 1)) = 1.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$k \mid n \iff R(k) \mid R(n).$$

(c) Seien $a, b \in \mathbb{N}$ verschieden von 0. Zeigen Sie:

$$ggT(R(a), R(b)) = R(ggT(a, b)).$$

(d) Überlegen und argumentieren Sie, dass die Aufgabe nicht nur im Dezimalsystem, sondern in jedem b-System ($2 \leq b \in \mathbb{N}$) klappt, also dass (a), (b) und (c) auch gelten wenn wir für $n \in \mathbb{N}$ $R(n) = [\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}]_b$ festlegen.

Aufgabe 4: (10 Punkte) Sei $\mathbb{R}[x]$ der Ring der reellen Polynome mit der Anordnung aus Aufgabe 4a, 12. Übungsblatt, und sei

$$\mathbb{R}(x) := \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \mid p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x], q(x) \neq 0 \right\}$$

der Körper der rationalen Funktionen. $\mathbb{R}(x)$ ist ein angeordneter Körper mit der Ordnung

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0 \iff p(x) \cdot q(x) > 0 \text{ in } \mathbb{R}[x]$$

und somit eine Lösung für Aufgabe 4c, 12. Übungsblatt.
Sei $\mathbb{R}((x))$ die Cauchy Vervollständigung von $\mathbb{R}(x)$, d.h. $\mathbb{R}((x))$ ist ein angeordneter Körper in dem jede Cauchy Folge konvergiert und so dass $\mathbb{R}(x)$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}((x))$ ist. Ziel dieser Aufgabe ist es, $\mathbb{R}((x))$ zu beschreiben. Zeigen Sie dazu:

(a) Ist $r \in \mathbb{Z}$ und ist $(a_n)_{n \geq r}$ eine Folge reeller Zahlen, so ist die Reihe

$$\sum_{n=r}^{\infty} a_n x^n$$

eine Cauchy Reihe in $\mathbb{R}(x)$ und konvergiert also in $\mathbb{R}((x))$.

(b) Sei K die Teilmenge von $\mathbb{R}((x))$, die aus den Grenzwerten solcher Reihen besteht. Dann ist $K \supseteq \mathbb{R}(x)$ ein Körper.

Tipp:

$$\frac{1}{a_r x^r + \ldots} = \frac{1}{a_r x^r} \frac{1}{1 + \ldots},$$

der letzte Bruch lässt sich als Summe einer geeigneten geometrischen Reihe schreiben.

(c) Sei $(f_k(x))_k$ eine Folge in K mit

$$f_k(x) = \sum_{n=r_k}^{\infty} a_{k,n} x^n.$$

Dann ist $(f_k(x))_k$ eine Cauchy Folge genau dann wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Es existiert ein $r \in \mathbb{Z}$ so, dass $a_{k,n} = 0$ für $n < r$ und alle k. Man darf also in einer Cauchy Folge o.B.d.A. $r_k = r$ als konstant annehmen.

(2) Für jedes feste $n \in \mathbb{Z}$ gibt es ein k_n so, dass $a_{k_n,n} = a_{l,n}$ für alle $l \geq k_n$.

(d) K ist Cauchy vollständig. Mit (b) folgt dann $K = \mathbb{R}((x))$.

(e) $\mathbb{R}((x))$ ist nicht schnittvollständig, d.h. es gibt eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von K die in K kein Supremum besitzt.