Prof. Dr. M. Lesch
P. Holy

Abgabe bis 04.11.

Übungen zur Vorlesung Elemente der Mathematik

ÜBUNGSBLATT 2

Aufgabe 1: (4 Punkte) Seien $f_0 \colon X_0 \to Y_0$ und $f_1 \colon X_1 \to Y_1$ Abbildungen.

(a) Wann ist $f_0 \cap f_1$ eine Abbildung? [1]
(b) Was sind dann der Definitionsbereich und das Bild von $f_0 \cap f_1$?
(c) Wann ist $f_0 \cup f_1$ eine Abbildung?
(d) Was sind dann der Definitionsbereich und das Bild von $f_0 \cup f_1$?

Definition: Für eine beliebige Relation R bezeichne R^{-1} die *inverse* Relation, d.h. $R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$, also die Menge aller geordneten Paare (y,x) für die x bezüglich R in Relation zu y steht. Ist $f \colon X \to X$ eine Abbildung, so ist f auch eine Relation auf X, und wir haben somit auch f^{-1} definiert.

Aufgabe 2: (6 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Sei $X \neq \emptyset$ und sei $f \colon X \to Y$ eine injektive Abbildung. Dann ist f^{-1} eine injektive Abbildung.
(b) Was sind der Definitionsbereich und das Bild von f^{-1}?
(c) Ist $A \neq \emptyset$ und $f \colon A \to B$ injektiv, so gibt es $g \colon B \to A$ surjektiv.
(d) Ist $B \neq \emptyset$ und $f \colon A \to B$ surjektiv, so gibt es $g \colon B \to A$ injektiv.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

(a) Wieviele verschiedene Äquivalenzrelationen gibt es auf der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$?
(b) Definieren Sie eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, bezüglich der es für jedes positive $n \in \mathbb{N}$ eine Äquivalenzklasse mit n Elementen gibt (0 ist dabei nicht positiv).

[1] Bemerkung: Nach der Definition der Vorlesung sind Abbildungen spezielle Mengen. Der Durchschnitt von zwei Abbildungen ist damit also einfach der Durchschnitt dieser Mengen.

Aufgabe 4: (6 Punkte) Sei A eine Menge und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Wir können eine natürlich gegebene Surjektion von A in die Menge $A/\sim$ der Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ definieren: sei $\Phi_\sim$ die Abbildung

$$\Phi_\sim \colon A \to A/\sim, \quad x \to [x]_\sim.$$

Sei andererseits $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Dann induziert f eine natürlich gegebene Äquivalenzrelation auf A: Sei $\sim_f$ die Relation, die definiert ist durch

$$x \sim_f y \iff f(x) = f(y).$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A, so ist $\Phi_\sim \colon A \to A/\sim$ surjektiv.

(b) Ist $f\colon A \to B$ eine Abbildung, so ist $\sim_f$ eine Äquivalenzrelation auf A.

(c) Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A, so ist diese ident zur Äquivalenzrelation $\sim_{(\Phi_\sim)}$, d.h. es gilt für alle $a, b \in A$

$$a \sim b \iff a \sim_{(\Phi_\sim)} b.$$

(d) Ist $f\colon A \to B$ surjektiv, so ist

$$\Phi_{(\sim_f)} = i \circ f$$

für eine geeignete Bijektion $i\colon B \to A/\sim_f$.

Hinweis:

Es gibt einen Help Desk speziell für Lehramtsstudierende für die Elemente der Mathematik Vorlesung, der von Frau Anna Ribelles Perez betreut wird. Die Termine dazu sind wie folgt:

Dienstag 10-13 Uhr, Raum N1.002 Endenicher Allee 60 (Nebengebäude)
Freitag 13-16 Uhr, Zeichensaal Wegelerstr. 10