Prof. Dr. M. Lesch
P. Holy

Abgabe bis 11.11.

Übungen zur Vorlesung Elemente der Mathematik

ÜBUNGSBLATT 3

Aufgabe 1: (3 Punkte) Sei A eine Menge und sei $\sim$ eine Relation auf A, so dass folgende Punkte erfüllt sind:

- $\forall a \in A \; a \sim a$.
- $\forall a, b, c \in A \; (a \sim b \wedge a \sim c) \to c \sim b$.

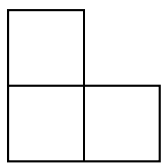
Ist damit $\sim$ notwendigerweise eine Äquivalenzrelation? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Wir identifizieren eine natürliche Zahl n mit der Menge aller kleineren natürlichen Zahlen, $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Inbesondere identifizieren wir die natürliche Zahl 0 also mit der leeren Menge $\emptyset$, und jede natürliche Zahl n hat genau n verschiedene Elemente.

Aufgabe 2: (6 Punkte) Wir nennen eine Menge *endlich*, wenn sie nicht unendlich ist. Zeigen Sie (unter Verwendung der Definition einer unendlichen Menge aus der Vorlesung):

(a) Jede natürliche Zahl ist endlich.
(b) Eine Menge A ist endlich genau dann wenn es eine natürliche Zahl n und eine Bijektion $i\colon A \to n$ gibt.

Aufgabe 3: (5 Punkte) Das Objekt in der Abbildung nennen wir ein Tromino. Es besteht aus drei quadratischen Feldern.

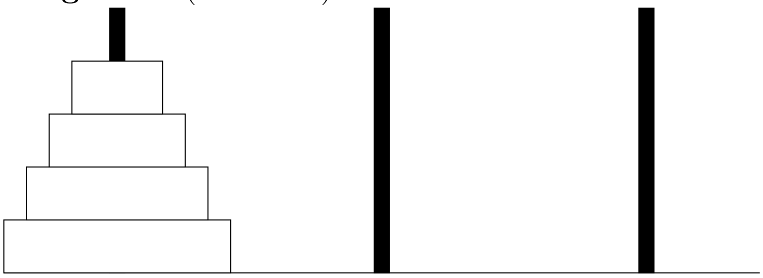


Sei n eine natürliche Zahl.

Behauptung: Nimmt man aus einem $2^n \times 2^n$ Spielbrett (bestehend aus ebensolchen quadratischen Feldern) ein Feld weg, so kann das restliche Spielbrett mit Trominos bedeckt werden und zwar so, dass die Trominos nicht überlappen und nicht über den Rand des Spielbretts hinausragen. Dabei dürfen die Trominos vor dem Legen jeweils um beliebige Vielfache von 90° gedreht werden.

Beweisen Sie mit Hilfe des Induktionsprinzips, dass die oben stehende Behauptung für alle natürlichen Zahlen n gilt.

Aufgabe 4: (5 Punkte)



Das obige Bild illustriert die Ausgangsstellung im Spiel *Turm von Hanoi* mit 4 Scheiben. Wir beschreiben den allgemeineren Fall des Turm von Hanoi mit n Scheiben, für eine beliebige natürliche Zahl n. Es gibt 3 Stangen und auf der linkesten Stange liegen n jeweils unterschiedlich große Scheiben nach Größe geordnet, wobei die größte Scheibe ganz unten liegt. Das Ziel dieses Spiels ist es, alle Scheiben von der linkesten Stange auf die rechteste Stange zu verschieben. Dabei darf in einem Zug immer nur die oberste Scheibe von einer beliebigen Stange weggenommen und oben auf eine andere Stange gelegt werden, sofern diese leer ist oder dabei keine größere Scheibe auf einer kleineren zu liegen kommt.

Zeigen Sie mit Hilfe des Induktionsprinzips: Für eine beliebige natürliche Zahl n lässt sich das Spiel Turm von Hanoi mit n Scheiben gewinnen, d.h. man kann in der oben beschriebenen Ausgangsstellung beginnend, unter Beachtung obiger Regeln, alle n Scheiben von der linkesten auf die rechteste Stange verschieben.