Prof. Dr. M. Lesch
P. Holy

Abgabe bis 18.11.

Übungen zur Vorlesung Elemente der Mathematik

ÜBUNGSBLATT 4

Aufgabe 1: (6 Punkte) Zeigen Sie, unter Verwendung der Peano-Axiome und der Definitionen und Resultate aus der Vorlesung (insbesondere dürfen Sie die Assoziativität der Addition verwenden):

(a) $\forall a \in \mathbb{N}\ a + 1 = 1 + a$.
(b) $\forall a, b \in \mathbb{N}\ a + b = b + a$.
(c) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Hinweis zu (c): Vollständige Induktion nach c.

Aufgabe 2: (4 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Aussagen. Verwenden Sie ausschließlich die Peano-Axiome, die Definition der Addition und der Multiplikation, die Resultate aus der Vorlesung, die jeweils vorhergehenden Aufgabenteile und die Resultate aus Aufgabe 1.

(a) $\forall m, n \in \mathbb{N} \quad m + n = 0 \Rightarrow m = 0 \wedge n = 0$.
(b) $\forall m, n \in \mathbb{N} \quad m \cdot n = 0 \Rightarrow m = 0 \vee n = 0$.
(c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \cdot n = 0$.
(d) $\forall m, n \in \mathbb{N} \quad m \cdot n = 1 \Rightarrow m = 1 \wedge n = 1$.

Aufgabe 3: (5 Punkte) Zeigen Sie (bei (a)-(c) ausschließlich unter Verwendung der Peano-Axiome und der Definitionen aus der Vorlesung):

(a) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
(b) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}\ a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.
(c) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}\ (a^b)^c = a^{b \cdot c}$.
(d) Zeigen Sie, dass Potenzieren keine assoziative Operation ist. Widerlegen Sie also die folgende Aussage:

$$\forall k, m, n \in \mathbb{N} \ \ (k^m)^n = k^{(m^n)}.$$

(e) Wir notieren $k^{(m^n)}$ im Folgenden als k^{m^n}. Wir möchten die Notation $m * n$ für wiederholtes Potenzieren einführen. Es soll gelten:

$$m * 1 = m \quad m * 2 = m^m \quad m * 3 = m^{m^m} \quad \ldots$$

Definieren Sie $m * n$ rekursiv nach n (definieren Sie $m * 0$ und $m * S(n)$ in Abhängigkeit von $m * n$).

Aufgabe 4: (4 Punkte) Es gibt natürlich verschiedene Möglichkeiten, die ganzen Zahlen, ausgehend von den natürlichen Zahlen, einzuführen. Wir wollen in dieser Aufgabe etwas formaler betrachten, wie Sie das wahrscheinlich selbst als Schüler kennengelernt haben, und dies mit der Methode aus der Vorlesung vergleichen.
Wir betrachten hier $+$ und $-$ (auch) als mathematische Objekte, die etwa auch Elemente einer Menge sein können. Sei $\approx$ die Äquivalenzrelation auf $\{+,-\} \times \mathbb{N}$ so dass für $a = (a_0, a_1)$ und $b = (b_0, b_1)$ in $\{+,-\} \times \mathbb{N}$ gilt

$$a \approx b \;\Leftrightarrow\; (a = b \vee a_1 = b_1 = 0).$$

Statt $(+, n)$ schreiben wir auch $+n$ oder einfach nur n, statt $(-, n)$ schreiben wir auch $-n$. Mit Hilfe von $\approx$ identifizieren wir also $+0$ mit -0. Sei nun

$$\mathbb{Z}^* = (\{+,-\} \times \mathbb{N})/\approx .$$

Definieren Sie (mittels Fallunterscheidungen, ausgehend von den entsprechenden in der Vorlesung definierten Operationen auf $\mathbb{N}$) eine Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ auf $\mathbb{Z}^*$, so dass $(\mathbb{Z}^*, +, \cdot)$ die Struktur der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit Addition und Multiplikation (letztere jeweils wie in der Vorlesung definiert) repräsentiert. Formal heisst das, es soll eine Bijektion φ von $\mathbb{Z}^*$ nach $\mathbb{Z}$ geben, so dass für $x, y \in \mathbb{Z}^*$ gilt:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ und } \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

Beweisen Sie, dass für Ihre Definitionen von Addition und Multiplikation diese formale Bedingung erfüllt ist, d.h. definieren Sie eine solche Bijektion φ und rechnen Sie nach, dass diese obige Bedingungen erfüllt.

Bemerkung: Lassen Sie sich nicht davon verwirren, dass etwa $+$ in dieser Aufgabe 3 verschiedene Bedeutungen hat, einerseits dient es bei der Konstruktion von $\mathbb{Z}^*$ einfach als (quasi eigenschaftsloses) Symbol/Objekt, dann bezeichnet es die in der Vorlesung eingeführte Addition auf $\mathbb{Z}$ und es soll auch als Symbol für die Addition auf $\mathbb{Z}^*$ dienen. Das sind im Grunde 3 verschiedene Dinge, die a priori nichts miteinander zu tun haben. Solche Mehrfachverwendungen von Symbolen sind in der Mathematik durchaus üblich, vor allem wenn sich im Nachhinein herausstellen soll, dass diese Symbole doch Dinge bezeichnen, die zueinander eng in Beziehung stehen, und aus dem Kontext immer klar ist, welche Deutung des Symboles gerade die richtige ist.