Prof. Dr. M. Lesch
P. Holy

Abgabe bis 25.11.

# Übungen zur Vorlesung Elemente der Mathematik

## ÜBUNGSBLATT 5

Ist $X$ eine Menge und $<$ eine Relation auf $X$, so nennen wir $<$ eine *Halbordnung* auf $X$, wenn $<$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. Im Unterscheid zu einer Totalordnung ist eine Halbordnung also nicht notwendigerweise auch eine lineare Ordnung.

**Aufgabe 1:** (4 Punkte) Zeigen Sie, jeweils für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

(a) $a \mid b \Rightarrow a \mid b \cdot c$.
(b) $[a \mid b \wedge b \mid c] \Rightarrow a \mid c$.
(c) $[a \mid b \wedge a \mid c] \Rightarrow \forall k, l \in \mathbb{Z} \quad a \mid (k \cdot b + l \cdot c)$.
(d) $[a \mid b \wedge b \mid a] \Rightarrow b = \pm a$.
(e) $[a \mid b \wedge b \neq 0] \Rightarrow |a| \leq |b|$.
(f) Ist $c \neq 0$, so gilt
$$a \mid b \Leftrightarrow c \cdot a \mid c \cdot b.$$
(g) Die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen ist eine Halbordnung, aber keine Totalordnung.
(h) Die Teilbarkeitsrelation auf den ganzen Zahlen ist keine Halbordnung.

**Aufgabe 2:** (6 Punkte) Sei $A$ eine fest gewählte Menge. Wir definieren nun eine Relation auf der Menge aller Äquivalenzrelationen auf $A$. Seien $\sim$ und $\approx$ Äquivalenzrelationen auf $A$. Wir schreiben $\sim \leq \approx$ und sagen $\sim$ verfeinert $\approx$, wenn $\forall a \in A \; [a]_\sim \subseteq [a]_\approx$.

(a) Zeigen Sie: $\leq$ ist eine Halbordnung auf der Menge aller Äquivalenzrelationen auf $A$.
(b) Zeigen Sie: Wenn $A$ zumindest 3 verschiedene Elemente hat, dann ist $\leq$ keine Totalordnung auf der Menge aller Äquivalenzrelationen auf $A$.
(c) Es gibt bzgl. $\leq$ sowohl ein kleinstes als auch ein größtes Element. Bestimmen Sie diese.

Ein *Kettenbruch* oder *fortgesetzter Bruch* ist ein Ausdruck der Form:

$$a + \cfrac{b}{c + \frac{d}{e + \frac{f}{\ddots}}}$$

Dabei sind $a, b, c, d, e, f, \ldots \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Wir nennen einen solchen Kettenbruch endlich, wenn diese Darstellung nach endlich vielen Schritten abbricht, und wir nennen einen Kettenbruch regulär, wenn alle Zähler $(b, d, f, \ldots)$ gleich 1 sind. Ein endlicher Kettenbruch wäre z.B.

$$3 + \frac{7}{3 + \frac{4}{5}}$$

**Aufgabe 3:** (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 3728524 und 882433.

(b) Stellen Sie diesen größten gemeinsamen Teiler als Linearkombination der ursprünglich gegebenen Zahlen dar.

(c) Ermitteln Sie eine endliche, reguläre Kettenbruchdarstellung von $\frac{3728524}{882433}$.

**Aufgabe 4:** (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\exists u, v \in \mathbb{Z} \quad \frac{1}{\mathrm{kgV}(a, b)} = \frac{u}{b} + \frac{v}{a}.$$